

第 59 講 円順列

学習目標

- ・円形に並べるとき、回転して一致する配置を同じものとして判断できる。
- ・1 人を基準の位置に固定することで、円順列を一行の順列に直して考えられる。
- ・異なる n 個の円順列が $(n-1)!$ 通りになる理由を説明できる。
- ・円順列と通常の一列の順列を区別して、基本的な場合の数を求められる。

何を「同じ並び」とみなすか

円形では回転しただけなら同じ配置

同じものを含む順列では、入れ替えても見た目が変わらない並びを重複して数えないことが大切でした。

円形に並べる場合にも、「何を同じ配置とみなすか」が重要です。
異なる 4 人 A, B, C, D が円形のテーブルのまわりに座るとします。
時計回りに、

$$A, B, C, D$$

と並んでいる配置を考えます。
テーブル全体を回転させると、見かけ上は、

$$B, C, D, A$$

や、

$$C, D, A, B$$

のように書くこともできます。
しかし、隣り合う人の関係は変わっていません。
円順列では、このように回転させると一致する配置は同じ配置として数えます。

円順列

異なるものを円形に並べるとき、回転によって一致する並びを同じものとみなして数える順列を円順列といいます。

回転は同じ、裏返しは別

円順列では、

- ・全体を回転しただけの配置 → 同じ
 - ・時計回りの順序を反対向きにした配置 → 原則として別
- と考えます。

この講では、裏返して一致するものまで同じとする数え方は扱いません。

一行に並べると $n!$ 通り

そのまま $n!$ では数えすぎる

異なる n 個を一行に並べるなら、並べ方は、

$$n!$$

通りです。

ところが、これを円形の並びとして見ると、1つの円形配置が何度も数えられています。
たとえば4人 A, B, C, D の1つの円形配置を、一列のように書き始める人を変えると、

書き始める人	時計回りの表し方
A	$ABCD$
B	$BCDA$
C	$CDAB$
D	$DABC$

となります。

この4つは、円を回転すればすべて同じ配置です。

つまり、一列の順列 $4!$ 通りの中では、1つの円形配置を4回ずつ数えています。

n 個なら n 回ずつ重複する

異なる n 個の1つの円形配置は、どのものを最初に書くかによって n 通りに表せます。

したがって、一列に並べた $n!$ 通りをそのまま使うと、各円形配置を n 回ずつ重複して数えています。

1 人を固定して考える

回転による重複を最初からなくす

円順列では、回転による重複を避けるために、1人をある位置に固定して考えると分かりやすくなります。

異なる5人 A, B, C, D, E を円形に並べるとします。

まず A の位置を固定します。

すると、残りの4人 B, C, D, E を、 A のまわりの残り4か所に並べればよいことになります。

残り4人はすべて異なるので、その並べ方は、

$$4!$$

通りです。

したがって、5人の円順列は $4! = 24$ 通りです。

円順列では 1 人を固定する

異なる n 個を円形に並べるときは、

1. 1個を基準として固定する。
2. 残り $n-1$ 個を順に並べる。

と考えます。

残りの並べ方は $(n-1)!$ 通りです。

円順列の公式

異なる n 個の円順列

異なる n 個を円形に並べる円順列の数は、

$$(n-1)!$$

通りです。

$n!$ を n で割っても同じ

一列に並べると $n!$ 通りです。

しかし、1つの円形配置は、書き始める位置を変えることで n 回ずつ数えられています。

そのため、

$$\frac{n!}{n}$$

とすると重複を取り除けます。

ここで、

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

なので、

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

です。

したがって、円順列の数は $(n-1)!$ 通りになります。

2つの見方は同じ

円順列の公式 $(n-1)!$ は、次のどちらからも説明できます。

- 1人を固定し、残り $n-1$ 人を並べる。
- $n!$ 通りから、回転による n 回の重複を取り除く。

入門では、1人を固定する方法を基本として使います。

一列の順列と円順列を比べる

位置に基準があるかを見る

異なる 4 人を並べるとき、一列に並べる場合と円形に並べる場合では数が違います。

並べ方	場合の数
一列に並べる	$4! = 24$
円形に並べる	$(4-1)! = 3! = 6$

一列には「左端」という固定された位置があります。

そのため、全員を 1 つずつ右へずらせば別の並びになります。

一方、円形には特別な始点がありません。

全員を同じだけ回転させても、人どうしの位置関係は変わらないので同じ配置です。

円が描かれていても必ず円順列とは限らない

問題で円形の場所が描かれていても、座席に番号がついているなど、位置そのものが区別されている場合は回転後も別の配置になります。

円順列を使うのは、回転した配置を同じものとして扱う場合です。

時計回りと反時計回りを区別する

向きを反対にただけでは回転と同じにならない

4 人 A, B, C, D が時計回りに、

$$A, B, C, D$$

と並ぶ配置を考えます。

A を固定したまま時計回りを反対にすると、

$$A, D, C, B$$

となります。

この 2 つは、単に円を回転しただけでは一致しません。

したがって、この講の円順列では別の配置として数えます。

数珠のように裏返す考えは使わない

この講では、平面上の円形配置だけを扱います。

裏返すと一致する配置まで同じとみなす数え方は扱いません。

円順列を解く手順

基本手順

異なるものを円形に並べる問題では、次の順に考えます。

1. 回転した配置を同じものとして扱う問題か確認する。
2. 並べるものがすべて異なることを確認する。
3. 1 人または 1 個を固定する。
4. 残り $n - 1$ 個を一行に並べるように考える。
5. $(n - 1)!$ を計算する。

固定する人は誰でもよい

6 人 A, B, C, D, E, F を円形に並べるとき、 A を固定しても、 C を固定しても構いません。

大切なのは、1 人だけを基準として固定し、回転による同じ配置を何度も数えないようにすることです。

1 人を固定すれば、残り 5 人を並べるだけなので、 $5!$ 通りになります。

例題

例題 1

異なる 4 人 A, B, C, D が、円形のテーブルのまわりに座ります。

回転して一致する座り方を同じものとするとき、座り方は何通りありますか。

例題 1 の解答・解説

1 人、たとえば A の位置を固定します。
すると、残りの B, C, D の 3 人を、 A のまわりに並べればよいので、

$$3! = 6$$

通りです。
したがって、座り方は 6 通りです。

例題 2

異なる 6 個の飾りを、円形に等間隔で並べます。
回転して一致する配置を同じものとする、配置は何通りありますか。

例題 2 の解答・解説

異なる 6 個の円順列なので、1 個を固定します。
残り 5 個の並べ方は、

$$5!$$

通りです。
したがって、

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

より、120 通りです。

例題 3

異なる 5 人を円形に並べます。
ある生徒は、一列の順列と同じように $5! = 120$ 通りと答えました。
この答えが数えすぎである理由を説明し、正しい場合の数を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

円形では、全員を同じだけ回転させた配置は同じものとして扱います。
一列の順列 $5!$ 通りでは、1 つの円形配置を、どの人から書き始めるかによって 5 回ずつ数えています。
そこで、1 人を固定して残り 4 人を並べると、

$$4! = 24$$

通りです。
したがって、正しい場合の数は 24 通りです。

演習問題

練習問題 1

異なる 3 人を円形に並べます。
回転して一致する配置を同じものとする、何通りありますか。

練習問題 2

異なる 5 個の置物を円形に並べます。
回転して一致する配置を同じものとする、何通りありますか。

練習問題 3

異なる 7 人が円形のテーブルのまわりに座ります。
座り方は何通りありますか。

練習問題 4

異なる 4 人 A, B, C, D を円形に並べるとき、 A の位置を固定して考えます。
残り 3 人の並べ方をすべて列挙し、円順列が 6 通りになることを確かめなさい。

練習問題 5

異なる 6 人を、
(1) 一列に並べる場合
(2) 円形に並べ、回転して一致する配置を同じものとする場合
について、それぞれ何通りあるか求めなさい。

練習問題 6

ある生徒は、異なる 8 人の円順列を、
$$8!$$

通りとしました。
どこが誤りか説明し、正しい場合の数を求めなさい。

練習問題 7

異なる 5 人 A, B, C, D, E を円形に並べます。
時計回りに、
$$A, B, C, D, E$$

と並ぶ配置と、
$$B, C, D, E, A$$

と並ぶ配置は、同じ円順列として扱いますか。理由も答えなさい。

練習問題 8

異なる 4 人 A, B, C, D を円形に並べます。
時計回りに、

$$A, B, C, D$$

と並ぶ配置と、

$$A, D, C, B$$

と並ぶ配置を、この講の円順列では同じものとして扱いますか。理由も答えなさい。

練習問題 9

異なる 5 人を円形に並べる問題について、次の 2 つの考え方が同じ答えになることを確かめなさい。

- (1) 1 人を固定し、残り 4 人を並べる。
- (2) 一列の並べ方 $5!$ 通りを求め、回転による重複の回数で割る。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

1 人を固定すると、残り 2 人を並べればよいので、

$$(3 - 1)! = 2! = 2$$

通りです。

したがって、2 通りです。

練習問題 2 の解答・解説

異なる 5 個の円順列なので、

$$(5 - 1)! = 4!$$

です。

したがって、

$$4! = 24$$

より、24 通りです。

練習問題 3 の解答・解説

1 人を固定し、残り 6 人を並べます。
したがって、

$$(7 - 1)! = 6! = 720$$

より、720 通りです。

練習問題 4 の解答・解説

A を固定すると、残りの B, C, D の時計回りの並べ方は、

- B, C, D
- B, D, C
- C, B, D
- C, D, B
- D, B, C
- D, C, B

の 6 通りです。

したがって、円順列は $3! = 6$ 通りです。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 一列に並べる場合は、

$$6! = 720$$

通りです。

(2) 円形に並べる場合は 1 人を固定して残り 5 人を並べるので、

$$5! = 120$$

通りです。

したがって、一列では 720 通り、円形では 120 通りです。

練習問題 6 の解答・解説

8! とすると、全員を同じだけ回転させただけの配置を別々に数えてしまいます。

円順列では 1 人を固定して、残り 7 人を並べます。

したがって、

$$(8 - 1)! = 7!$$

です。

よって、

$$7! = 5040$$

より、5040 通りです。

練習問題 7 の解答・解説

同じものとして扱います。

A, B, C, D, E を全体として 1 つ分だけ回転させると、 B, C, D, E, A になります。

人どうしの時計回りの位置関係は変わっていないので、円順列では同じ配置です。

練習問題 8 の解答・解説

同じものとしては扱いません。

A, B, C, D と A, D, C, B では、時計回りの順序が反対になっています。

回転だけでは一方を他方に一致させることはできません。

この講では裏返しを同じものとはみなさないで、2 つは別の円順列です。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 1 人を固定すると、残り 4 人を並べるので、

$$4! = 24$$

通りです。

(2) 一列では、

$$5! = 120$$

通りあります。

円形では 1 つの配置を、書き始める人を変えて 5 回ずつ数えているので、

$$\frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

通りです。

どちらの方法でも 24 通りとなります。