第 032 講 運動量と力積

この講でできるようになること

- 質量と速度から運動量を求め、その向きと大きさを区別できる。
- 一定質量の物体について、合力が働いた時間と運動量の変化を結び付けて判断できる。
- 力–時刻グラフの符号付き面積から力積を求め、運動量や速度の変化を説明できる。
- 複数の力や二次元の運動でも、合力の力積と運動量の変化を正しい向きで対応させられる。

1. 物体の運動を「運動量」で表す

同じ速さでも、質量が違えば運動の状態は違う

水平な床の上を走る軽い台車と重い台車を考える。同じ速さで動いていても、質量の大きい台車の運動を変えるには、一般に大きな力積が必要になる。

また、同じ質量・同じ速さでも、右へ動く場合と左へ動く場合では、運動の向きが異なる。質量だけでも速さだけでも、この違いを十分に表せない。

そこで、**質量と速度を組み合わせた、向きのある量**を用いる。

運動量

質量が一定の物体について、質量を m、速度を $\vec{v}$ とすると、運動量 $\vec{p}$ を次のように定義する。

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量はベクトルであり、向きは速度と同じである。運動量の大きさは、質量と速さの積である。

運動量の単位は $\mathrm{kg\,m/s}$ である。

ここでは質量が変化しない一つの物体を考える。質量 m は正の量なので、運動量の向きは速度の向きだけで決まる。

一直線上の運動では、まず正方向を決める。右向きを正とすれば、右向きの速度と運動量は正、左向きは負で表せる。

質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体について、右向きを正とする。

右向きに $3\,\mathrm{m/s}$ で動く場合は、

$$p = (2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s}) = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

同じ物体が左向きに $3\,\mathrm{m/s}$ で動く場合は、

$$p = (2\,\mathrm{kg})(-3\,\mathrm{m/s}) = -6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

©ミライコーチング

運動の状態	速度（m/s）	運動量（kg m/s）	運動量の大きさ（kg m/s）
右向きに進む	+3	+6	6
左向きに進む	−3	−6	6

運動量の成分には正負があるが、**運動量の大きさは負にならない**。負の運動量は「運動が弱い」という意味ではなく、選んだ正方向とは逆を向いていることを示す。

運動量と運動エネルギーは違う

運動エネルギーは、質量と速さから決まるエネルギーである。一方、運動量は速度の向きも反映する。

直前の二つの運動では、運動エネルギーはどちらも、

$$K = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 9\,\mathrm{J}$$

で等しい。しかし、運動量は $+6\,\mathrm{kg\,m/s}$ と $-6\,\mathrm{kg\,m/s}$ で異なる。

運動エネルギーの単位 J（ジュール）と、運動量の単位 $\mathrm{kg\,m/s}$ を混同してはならない。

2. 力積は運動量をどれだけ変えるかを表す

同じ力でも、働く時間によって結果が変わる

静止した台車を右向きに押す場合を考える。押す力の大きさが同じでも、短時間だけ押す場合と長時間押し続ける場合とでは、速度の変化が異なる。

つまり、力による運動の変化を考えるには、力の大きさや向きに加えて、**その力が働いた時間**も必要である。

力と作用時間を組み合わせた量を力積という。

一定の合力による力積

一定質量の物体に一定の合力 $\vec{F}$ が、時間 Δt だけ作用したとき、合力の力積 $\vec{J}$ は、

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t$$

である。

ここで Δt は正の経過時間であり、力積は力と同じ向きを持つベクトルである。

力積の単位は N s（ニュートン秒）である。

力積の記号には J を使うが、これはエネルギーの単位である J（ジュール）とは異なる。例えば、$+12\,\mathrm{N\,s}$ は力積であり、$12\,\mathrm{J}$ と書き換えてはならない。

また、ここでいう $\vec{F}$ は**物体に働くすべての外力の合力**である。複数の力がある場合、一つの力だけを取り出して合力と見なしてはならない。

運動方程式から力積と運動量の関係を導く

質量 m が一定の一つの物体を考える。ある時間区間の初めの速度を $\vec{v}_{\text{前}}$、終わりの速度を $\vec{v}_{\text{後}}$ とし、その間の合力が一定であるとする。

運動方程式と加速度の関係から、

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_{後} - \vec{v}_{前}}{\Delta t}$$

が成り立つ。

二つの式を組み合わせ、両辺に Δt を掛けると、

$$\begin{aligned}\vec{F}\Delta t &= m(\vec{v}_{後} - \vec{v}_{前}) \\ &= m\vec{v}_{後} - m\vec{v}_{前} \\ &= \vec{p}_{後} - \vec{p}_{前}\end{aligned}$$

となる。

ここで、運動量の変化を、

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{後} - \vec{p}_{前}$$

と定義する。

したがって、次の重要な関係が得られる。

力積と運動量の変化

一定質量の一つの物体について、合力の力積は、その物体の運動量の変化に等しい。

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

合力が一定である場合は、

$$\vec{F}\Delta t = \vec{p}_{後} - \vec{p}_{前}$$

となる。

時間とともに合力が変化する場合も、同じ時間区間全体の合力の力積が運動量の変化に等しい。後に扱う平均合力や力–時刻グラフを使って求められる。

この関係の重要な点は、運動量の変化が力の向きと作用時間によって決まることである。

例えば、正の力積を受けた物体では、運動量の正方向成分が増加する。ただし、もともと負方向へ動いていたなら、正方向の力積を受けてもすぐに正方向へ動き始めるとは限らない。

1

水平な一直線上を動く質量 $2\,\mathrm{kg}$ の台車がある。右向きを正とし、初速度は $+1\,\mathrm{m/s}$ である。

台車には右向きの一定の合力 $+4\,\mathrm{N}$ が $3\,\mathrm{s}$ 間働く。鉛直方向では力がつり合い、鉛直方向の運動はないものとする。

(1) この間の合力の力積を求めよ。

(2) 初めと終わりの運動量、および終速度を求めよ。

(3) 加速度と速度変化を求め、(2) の結果と一致することを確かめよ。

解答・解説

(1) 合力は一定であるため、

$$\begin{aligned} J &= F\Delta t \\ &= (+4\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{s}) \\ &= +12\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。正の力積なので、右向きの力積である。

(2) 初めの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

力積が運動量の変化に等しいので、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= p_{\text{前}} + J \\ &= (+2\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+12\,\mathrm{N\,s}) \\ &= +14\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

ここでは $1\,\mathrm{N\,s} = 1\,\mathrm{kg\,m/s}$ を使っている。したがって、終速度は、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+14\,\mathrm{kg\,m/s}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= +7\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

(3) 運動方程式から、

$$\begin{aligned} a &= \frac{+4\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= +2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

よって速度変化は、

$$\begin{aligned} \Delta v &= (+2\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{s}) \\ &= +6\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

初速度に加えると、

$$v_{\text{後}} = (+1\,\mathrm{m/s}) + (+6\,\mathrm{m/s}) = +7\,\mathrm{m/s}$$

となり、(2) と一致する。

©ミライコーチング

3. 運動の向きが変わるときの力積

速さの差ではなく、速度の差を使う

運動量の変化は、後の運動量から前の運動量を引いて求める。

$$\Delta p = p_{\text{後}} - p_{\text{前}}$$

特に注意したいのは、物体が途中で進行方向を変える場合である。速さだけを引き算すると、速度の符号の変化を見落としてしまう。

2

質量 $0.20\,\mathrm{kg}$ の物体が、水平な一直線上を初めは右向きに $10\,\mathrm{m/s}$ で動き、$0.020\,\mathrm{s}$ 後には左向きに $5\,\mathrm{m/s}$ で動いていた。

右向きを正とする。鉛直方向の力はつり合っているものとし、この時間区間について考える。

(1) 初めと終わりの運動量を求めよ。

(2) この間の運動量の変化と合力の力積を求めよ。

(3) この時間区間の平均合力を求め、その向きを答えよ。

解答・解説

(1) 左向きの速度には負号を付ける。

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (0.20\,\mathrm{kg})(+10\,\mathrm{m/s}) \\ &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ p_{\text{後}} &= (0.20\,\mathrm{kg})(-5\,\mathrm{m/s}) \\ &= -1.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

(2) 運動量の変化は、

$$\begin{aligned} \Delta p &= (-1.0\,\mathrm{kg\,m/s}) - (+2.0\,\mathrm{kg\,m/s}) \\ &= -3.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。したがって、合力の力積は $-3.0\,\mathrm{N\,s}$ である。

(3) 時間区間全体の平均合力を F_{av} とすると、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av}} &= \frac{-3.0\,\mathrm{N\,s}}{0.020\,\mathrm{s}} \\ &= -150\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。負号は、平均合力が左向きであることを表す。

初めの速さ $10\,\mathrm{m/s}$ と終わりの速さ $5\,\mathrm{m/s}$ の差だけを用いてはいけない。速度は $+10\,\mathrm{m/s}$ から $-5\,\mathrm{m/s}$ へ変わっているため、速度変化は $-15\,\mathrm{m/s}$ である。

この問題で求めたのは**すべての外力の合力の平均**である。特定の接触力だけの平均を求めたものではない。

停止までの時間が異なる場合

同じ運動量の変化を起こす場合でも、作用する時間が異なれば平均合力は変わる。

質量 0.50 kg の物体が右向きに +8 m/s で動いており、ある力の作用を受けて静止したとする。右向きを正とする。

このとき、

$$\begin{aligned}\Delta p &= (0.50\,\mathrm{kg})\,\big(\,0\,\mathrm{m/s} - (+8\,\mathrm{m/s})\,\big)\\ &= -4.0\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

である。

同じ停止でも、平均合力は次のように異なる。

停止までの時間（s）	合力の力積（N s）	平均合力（N）
0.020	−4.0	−200
0.10	−4.0	−40

停止までの時間が長いほど、同じ負の力積を生じさせる平均合力の大きさは小さくなる。

平均力と最大力は同じとは限らない

同じ力積について、

$$F_{\mathrm{av}} = \frac{J}{\Delta t}$$

が成り立つ。したがって、平均合力の大きさは作用時間に反比例する。

ただし、途中で力がどのように変化したかは、この式だけでは分からない。平均合力が小さいことから、最大の力も必ず小さいとは断定できない。

4. 力–時刻グラフの面積から力積を読む

グラフの横と縦が表す量

実際の力は、時間とともに大きくなったり小さくなったりすることがある。その場合、一定の力を用いた $F\Delta t$ の計算を、そのまま全時間に適用することはできない。

そこで利用するのが、力–時刻グラフである。

- 横軸：時刻 t、単位 s
- 縦軸：あらかじめ定めた正方向の合力成分 F、単位 N

一定の合力が働く場合、グラフと時間軸で囲まれた長方形の符号付き面積は、

$$F\Delta t$$

となり、力積に等しい。

例えば、正方向の合力が +5 N で 2 s 間続くなら、面積は、

$$(+5\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{s}) = +10\,\mathrm{N\,s}$$

である。

合力が時間とともに直線的に変わる場合は、三角形や台形に分けて面積を求められる。

力–時刻グラフの符号付き面積

力–時刻グラフでは、指定した時間区間の**符号付き面積**が、その方向の合力の力積に等しい。

- 時間軸より上の面積は正の力積である。
- 時間軸より下の面積は負の力積である。
- 正と負の面積は符号を付けて足し合わせる。

力積の単位は、

$$\mathrm{N}\times\mathrm{s}=\mathrm{N\,s}$$

となる。

グラフの傾きではなく、面積を読むことが重要である。

合力が直線的に増加する場合

以下のグラフは、水平に運動する一つの物体について、右向きを正とした合力の時間変化を示す。

グラフ上の横軸 x の数値は時刻 t を s で表した値、縦軸 y の数値は合力 F を N で表した値である。横軸は物体の水平位置を表すものではない。

この図では $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$ の範囲だけを対象とし、合力は $0\,\mathrm{N}$ から $+20\,\mathrm{N}$ まで直線的に増加する。図の外側の時刻まで同じ変化が続くとは限らない。

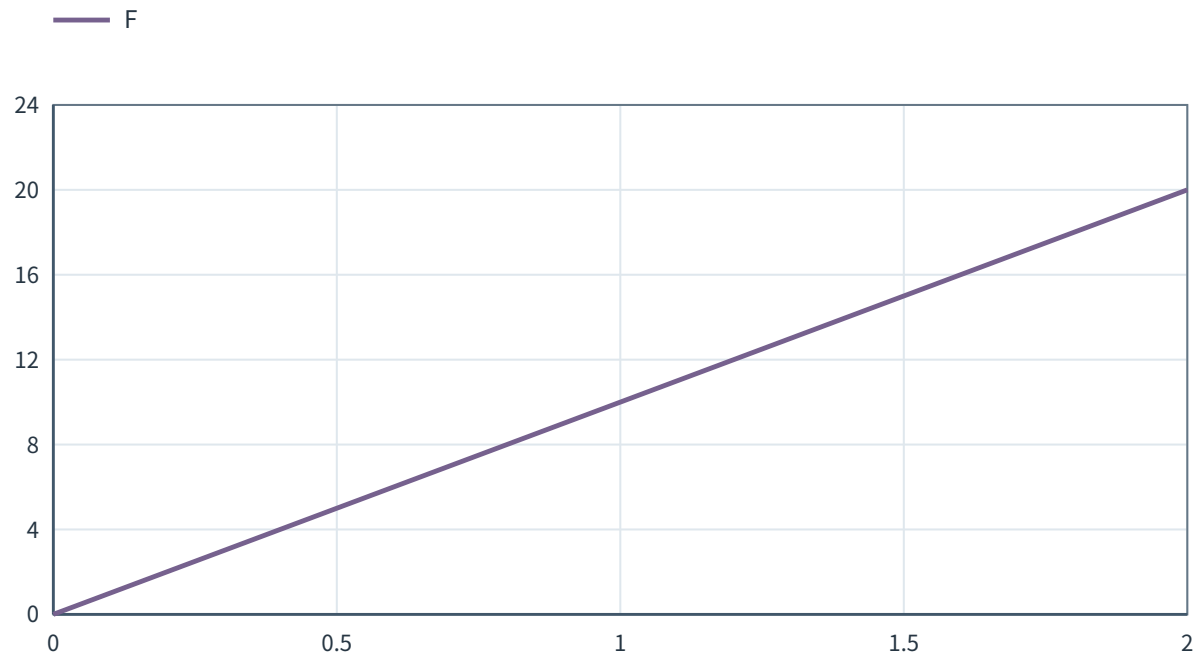

図 1　横軸 x は時刻 t（s）、縦軸 y は右向きを正とする合力 F（N）。対象区間は 0〜2s。

このような直線の下にできる三角形では、底辺が時間、高さが合力に対応する。

また、一定時間内に同じ力積を与える一定の力を考えると、それがその区間の平均合力に当たる。直線的に変化する合力では、平均合力の成分は両端の合力成分の平均である。

3

直前の力–時刻グラフに従って、質量 2 kg の台車に水平合力が働く。右向きを正とし、時刻 0 s の速度を $-3\,\mathrm{m/s}$ とする。鉛直方向の力はつり合っている。

(1) 0 s から 2 s までの合力の力積を求めよ。

(2) この区間の平均合力を求めよ。

(3) 時刻 2 s の運動量と速度を求めよ。

解答・解説

(1) グラフと時間軸で囲まれる三角形の底辺は 2 s、高さは 20 N である。

時間軸より上にあるため、面積は正となる。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{s})(+20\,\mathrm{N}) \\ &= +20\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

(2) 同じ力積を 2 s 間で生じさせる平均合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av}} &= \frac{+20\,\mathrm{N\,s}}{2\,\mathrm{s}} \\ &= +10\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。直線的に 0 N から 20 N へ増えるので、両端の値の平均とも一致する。

(3) 初めの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (2\,\mathrm{kg})(-3\,\mathrm{m/s}) \\ &= -6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

合力の力積を加えると、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= (-6\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+20\,\mathrm{N\,s}) \\ &= +14\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+14\,\mathrm{kg\,m/s}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= +7\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

初めは左向きに動いていたが、正の力積を受けた結果、終わりには右向きに動いている。なお、力–時刻グラフの面積だけから、この区間の変位を直接読み取ることはできない。

©ミライコーチング

正の面積と負の面積がある場合

次のグラフでは、合力は初め正であり、時刻 1 s で 0 N になった後、負に変わる。

横軸 x は時刻 t（s）、縦軸 y は右向きを正とする合力成分 F（N）である。直線は対象区間の 0 s から 2 s の変化だけを表す。

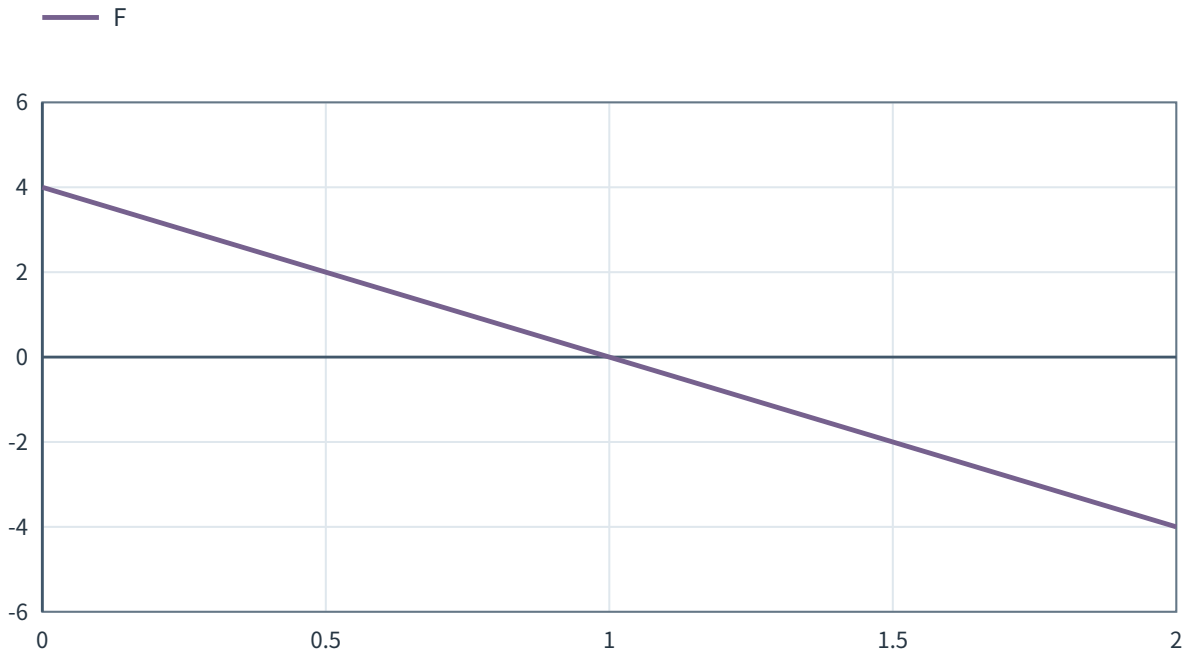

図 2　横軸 x は時刻 t（s）、縦軸 y は右向きを正とする合力 F（N）。時間軸の上下で力積の符号が変わる。

時間軸より上の三角形と下の三角形は、同じ大きさでも力積の符号が反対である。

4

直前の力–時刻グラフに従って、質量 1 kg の物体に水平合力が働く。右向きを正とし、時刻 0 s の速度は +1 m/s とする。鉛直方向の力はつり合っている。

(1) 0 s から 1 s までの力積を求めよ。

(2) 1 s から 2 s までの力積と、全区間の力積を求めよ。

(3) 時刻 1 s と 2 s の速度を求めよ。

(4) 全区間の平均合力が 0 N であることから、物体が常に一定速度で動いたといえるか、説明せよ。

解答・解説

(1) 前半は時間軸より上にある三角形なので、

$$J_1 = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{s})(+4\,\mathrm{N})$$
$$= +2\,\mathrm{N\,s}$$

となる。

(2) 後半は時間軸より下にあるため、

$$J_2 = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{s})(-4\,\mathrm{N}) = -2\,\mathrm{N\,s}$$

となる。

全区間の力積は、

$$J_{全} = (+2\,\mathrm{N\,s}) + (-2\,\mathrm{N\,s}) = 0\,\mathrm{N\,s}$$

である。

二つの三角形の面積の大きさを単純に足して $4\,\mathrm{N\,s}$ とすると、正味の力積を誤る。

(3) 初めの運動量は、

$$p_0 = (1\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) = +1\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

時刻 $1\,\mathrm{s}$ では、

$$p_1 = (+1\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+2\,\mathrm{N\,s}) = +3\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となるので、速度は $+3\,\mathrm{m/s}$ である。

時刻 $2\,\mathrm{s}$ では、

$$p_2 = (+3\,\mathrm{kg\,m/s}) + (-2\,\mathrm{N\,s}) = +1\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となるので、速度は $+1\,\mathrm{m/s}$ である。

(4) 全区間の平均合力は、

$$F_{\mathrm{av}} = \frac{0\,\mathrm{N\,s}}{2\,\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{N}$$

であるが、常に一定速度だったとはいえない。

実際に速度は $+1\,\mathrm{m/s}$ から $+3\,\mathrm{m/s}$ に変わり、その後 $+1\,\mathrm{m/s}$ に戻っている。**全区間の力積がゼロであることは、途中の合力が常にゼロであることを意味しない。**

変化する合力と平均合力

同じ区間について、合力の力積を J、経過時間を Δt とすれば、

$$J = F_{\mathrm{av}}\Delta t$$

が成り立つ。

平均合力とは、方向を含めた合力成分を時間について平均したものである。力の大きさだけを平均して符号を無視するものではない。

時間軸をまたぐ力–時刻グラフでは、正負の面積を打ち消し合わせて正味の力積を求める。

5. 二次元でも運動量の変化はベクトルの差

運動量の向きが変わる場合

ここまでは一直線上の運動を中心に扱った。しかし、運動量はベクトルなので、平面内で向きが変わる場合にも同じ考え方が使える。

例えば、運動量の成分が初めは、

$$\vec{p}_{\text{前}} = (3, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

であり、後には、

$$\vec{p}_{\text{後}} = (0, 4)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となった場合を考える。

ここで、括弧内の第 1 成分は水平方向、第 2 成分は鉛直方向の運動量を表す。二つの座標軸は直交し、正方向は右と上である。

運動量の変化は、各成分について後の値から前の値を引く。

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p} &= \vec{p}_{\text{後}} - \vec{p}_{\text{前}} \\ &= (0-3,\ 4-0)\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= (-3, 4)\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

この差を矢印でも確認する。

次の図は、**実際の空間内で物体が移動した軌道ではなく、運動量を座標で表したベクトル図**である。図の横軸と縦軸は、それぞれ運動量の成分に対応する。

原点 O から A へ向かう矢印が初めの運動量、O から B へ向かう矢印が後の運動量である。座標の 1 単位は $1\,\mathrm{kg\,m/s}$ を表す。

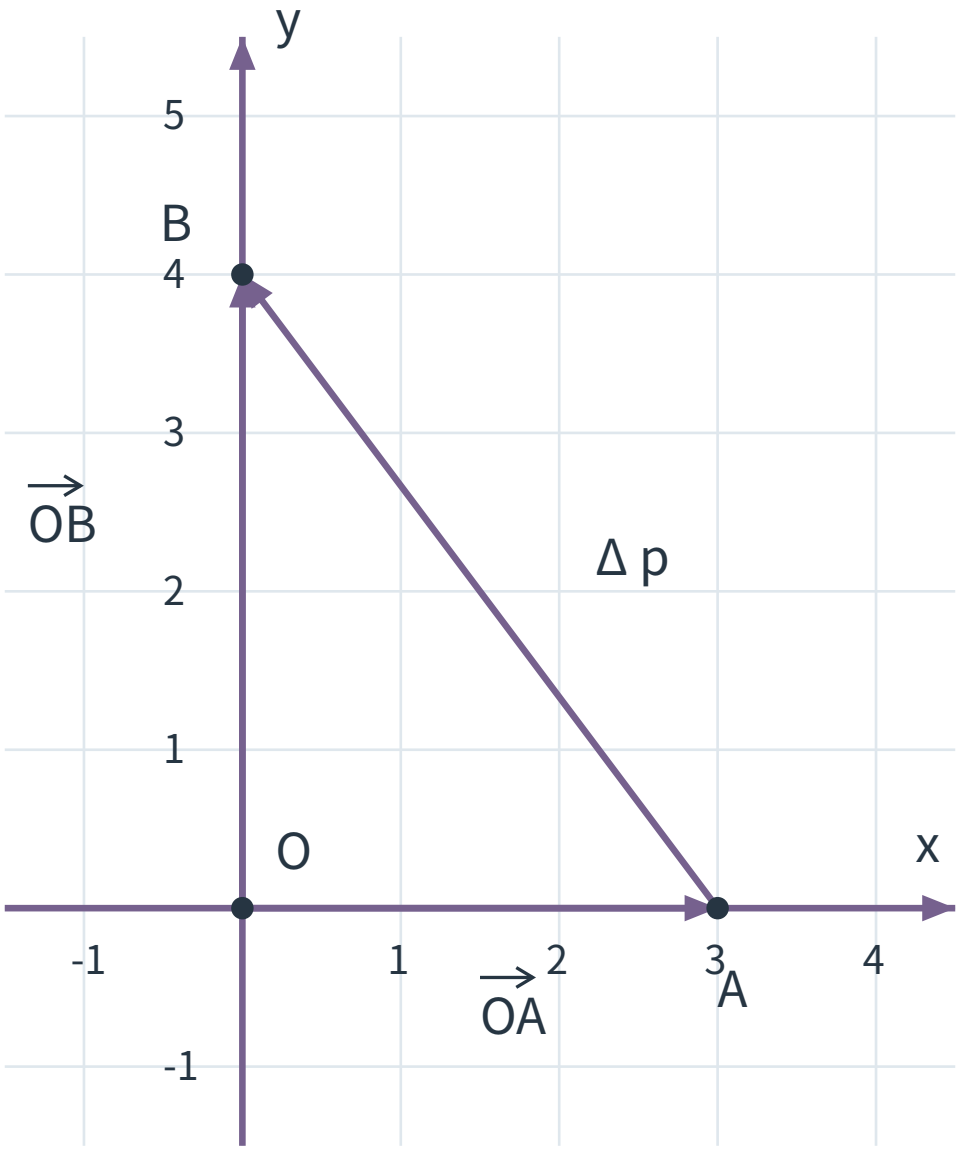

図 3　運動量空間のベクトル図。座標の単位は kg m/s。初めの運動量 O→A から後の O→B への変化は A→B。

運動量の変化は、初めの矢印の先端 A から、後の矢印の先端 B へ向かう矢印である。

この図の A から B への矢印は、物体が実際にその経路を移動したことを示していない。また、図上の長さから実空間での移動距離を求めることもできない。

ベクトルの大きさを求める

直交する二つの成分から、三平方の定理を使ってベクトルの大きさを求められる。

ここでは、

$$
\begin{aligned}
|\,\Delta\vec{p}\,| &= \sqrt{(-3)^2+4^2}\,\mathrm{kg\,m/s} \\
&= 5\,\mathrm{kg\,m/s} \\
&= 5\,\mathrm{N\,s}
\end{aligned}
$$

となる。

運動量の変化の大きさは、初めと終わりの運動量の大きさの差とは一般に一致しない。

5

直前の運動量空間の図に示すように、質量 $1\,\mathrm{kg}$ の一つの物体の運動量が、

$$\vec{p}_{\text{前}} = (3,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

から、

$$\vec{p}_{\text{後}} = (0,4)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

に変化した。この変化に要した時間は $0.50\,\mathrm{s}$ であり、質量は一定である。

(1) 合力の力積を成分で表し、その大きさを求めよ。

(2) 時間区間全体の平均合力を成分で表し、その大きさを求めよ。

(3) 初めと終わりの速さの差と、速度変化の大きさをそれぞれ求め、両者が一致するか説明せよ。

解答・解説

(1) 合力の力積は運動量の変化に等しい。

$$
\begin{aligned}
\vec{J} &= \vec{p}_{\text{後}} - \vec{p}_{\text{前}} \\
&= (-3,4)\,\mathrm{N\,s}
\end{aligned}
$$

その大きさは $5\,\mathrm{N\,s}$ である。

(2) 平均合力は、各成分について力積を時間で割る。

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{av}} &= \frac{(-3,4)\,\mathrm{N\,s}}{0.50\,\mathrm{s}} \\
&= (-6,8)\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

その大きさは、

$$
\begin{aligned}
|\,\vec{F}_{\mathrm{av}}\,| &= \sqrt{(-6)^2+8^2}\,\mathrm{N} \\
&= 10\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

である。

(3) 質量が 1 kg なので、初めの速度は $(3,0)\,\mathrm{m/s}$、終わりの速度は $(0,4)\,\mathrm{m/s}$ である。

初めの速さは 3 m/s、終わりの速さは 4 m/s なので、終わりから初めを引いた速さの差は $+1\,\mathrm{m/s}$ である。

一方、速度変化は、

$$\Delta\vec{v} = (-3,4)\,\mathrm{m/s}$$

であり、その大きさは 5 m/s である。

速さの差は大きさだけの比較であるのに対し、速度変化は向きも考えたベクトルの差なので、両者は一致しない。

6. 複数の力が働く場合は合力を使う

一つの力の力積と合力の力積

物体に複数の力が働く場合、それぞれの力は別々の力積を与える。

しかし、物体全体の運動量の変化に等しいのは、**それらをベクトルとして足し合わせた合力の力積**である。

同じ時間区間に一定の力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ が働くなら、

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\text{合}} &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\Delta t \\ &= \vec{F}_1\Delta t + \vec{F}_2\Delta t \\ &= \Delta\vec{p}\end{aligned}$$

となる。

一直線上では、正方向を決めて符号付きで足し合わせる。

6

質量 3 kg の台車が水平な床の上で静止している。右向きを正とする。

台車に右向きの一定の力 $+8\,\mathrm{N}$ を加えると同時に、左向きの一定の抵抗力 $-2\,\mathrm{N}$ が働いた。両方の力は 2 s 間作用した。

重力と床からの垂直抗力は鉛直方向でつり合い、台車は水平にだけ動くものとする。

(1) 二つの水平力がそれぞれ与える力積を求めよ。

(2) 水平方向の合力の力積を求めよ。

(3) 2 s 後の運動量と速度を求めよ。

解答・解説

(1) 右向きの力の力積は、

$$J_1 = (+8\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{s}) = +16\,\mathrm{N\,s}$$

である。

左向きの抵抗力の力積は、

$$J_2 = (-2\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{s}) = -4\,\mathrm{N\,s}$$

である。

(2) 水平方向の合力は、

$$F_{\text{合}} = (+8\,\mathrm{N}) + (-2\,\mathrm{N}) = +6\,\mathrm{N}$$

である。

したがって、合力の力積は、

$$\begin{aligned} J_{\text{合}} &= (+6\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{s}) \\ &= +12\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

個別の力積を足しても、

$$(+16\,\mathrm{N\,s}) + (-4\,\mathrm{N\,s}) = +12\,\mathrm{N\,s}$$

と一致する。

(3) 初めは静止していたため、初めの運動量は $0\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

終わりの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} + (+12\,\mathrm{N\,s}) \\ &= +12\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+12\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} \\ &= +4\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

右向きの力だけに注目して $+16\,\mathrm{N\,s}$ を運動量の変化とすると、左向きの抵抗力の影響を見落とす。

静止している瞬間でも合力がゼロとは限らない

物体が静止している瞬間には、速度がゼロなので運動量もゼロである。

しかし、その瞬間の合力までゼロとは限らない。静止状態から動き始める物体では、運動量がゼロの瞬間にも非ゼロの合力が働いている場合がある。

運動量がゼロであることと、運動量の変化がゼロであることは区別する必要がある。

演習問題

1

質量 1.5 kg の物体が水平な一直線上を運動している。右向きを正とし、次の二つの状態を考える。

- 状態 A：速度 $+4\,\mathrm{m/s}$
- 状態 B：速度 $-4\,\mathrm{m/s}$

(1) 各状態の運動量を符号付きで求めよ。

(2) 各状態の運動量の大きさを求めよ。

(3) 二つの状態の運動エネルギーをそれぞれ求め、運動量との違いを説明せよ。

2

質量 1.5 kg の台車が、初めは左向きに $2\,\mathrm{m/s}$ で動いていた。右向きを正とし、一定の水平合力 $+3\,\mathrm{N}$ が $4\,\mathrm{s}$ 間働いた。

台車の鉛直方向では力がつり合い、質量は一定である。

(1) 合力の力積を求めよ。

(2) 初めと終わりの運動量、および終速度を求めよ。

(3) 加速度と速度変化を求め、終速度の計算結果を確かめよ。

3

質量 250 g の物体が、水平な一直線上で右向きの速度 $+6\,\mathrm{m/s}$ から左向きの速度 $-2\,\mathrm{m/s}$ に変わった。

変化に要した時間は 40 ms である。右向きを正とし、鉛直方向の合力はゼロである。

(1) 質量を kg、時間を s に直せ。

(2) 初めと終わりの運動量、および合力の力積を求めよ。

(3) この区間の平均合力を求め、その向きを答えよ。

©ミライコーチング

4

質量 0.80 kg の物体が、水平な一直線上を +5 m/s で動いており、合力を受けて静止した。右向きを正とする。

同じ初期状態から、次の二通りの停止を考える。

- A：停止まで 0.020 s
- B：停止まで 0.10 s

いずれも鉛直方向の力はつり合い、水平な一直線上の運動だけを考える。

(1) 停止までの運動量の変化と合力の力積を求めよ。

(2) A と B の平均合力をそれぞれ求めよ。

(3) 平均合力の大きさを比較し、さらに、この情報だけから停止中の最大の力の大小を断定できるか答えよ。

5

質量 3 kg の台車が水平な一直線上を動いている。右向きを正とし、初速度は −1 m/s である。

時刻 0 s から 3 s まで、台車に働く右向きの合力は 0 N から +12 N へ直線的に増加する。鉛直方向の力はつり合っている。

(1) この時間区間の合力の力積を、力–時刻グラフの面積から求めよ。

(2) この区間の平均合力を求めよ。

(3) 時刻 3 s の運動量と速度を求めよ。

6

質量 1.5 kg の物体が水平な一直線上を動く。右向きを正とし、初速度を −2 m/s とする。

物体に働く水平合力は、時刻 0 s で +6 N、時刻 1 s で 0 N、時刻 2 s で −6 N となるように、0 s から 2 s まで直線的に変化する。鉛直方向では力がつり合う。

(1) 0〜1 s と 1〜2 s の各区間の力積を求めよ。

(2) 全区間の力積と平均合力を求めよ。

(3) 時刻 1 s と 2 s の速度をそれぞれ求めよ。

(4) 正負の面積の大きさの和と、正味の力積を比較し、その違いを説明せよ。

©ミライコーチング

7

質量 2 kg の物体が平面内で運動している。水平方向を第 1 成分、鉛直方向を第 2 成分とし、右向きと上向きをそれぞれ正とする。

初めと終わりの運動量は、

$$\vec{p}_{\text{前}} = (4, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

$$\vec{p}_{\text{後}} = (0, 3)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

この変化に要した時間は 0.50 s とする。

(1) 合力の力積を成分で表し、その大きさを求めよ。

(2) 平均合力を成分で表し、その大きさを求めよ。

(3) 初めと終わりの速さ、および速度変化の大きさを求めよ。速さの差と速度変化の大きさが一致するかも答えよ。

8

質量 2 kg の台車が水平な一直線上を初速度 $-1\,\mathrm{m/s}$ で動いている。右向きを正とする。

台車には、右向きの一定の力 $+7\,\mathrm{N}$ と、左向きの一定の外力 $-3\,\mathrm{N}$ が同時に 1.5 s 間作用した。これらの力の向きと大きさは、台車の運動方向によらず一定とする。

重力と垂直抗力はつり合い、台車の運動は水平方向だけとする。

(1) 二つの水平力がそれぞれ与える力積を求めよ。

(2) 合力の力積と運動量の変化を求めよ。

(3) 終わりの運動量と速度を求めよ。

(4) 右向きの力だけの力積を運動量の変化として用いると、なぜ誤りになるか説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 運動量は質量と符号付き速度の積である。

状態 A では、

$$\begin{aligned} p_A &= (1.5\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

状態 B では、

$$\begin{aligned} p_B &= (1.5\,\mathrm{kg})(-4\,\mathrm{m/s}) \\ &= -6.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

(2) 運動量の大きさは両方とも $6.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。向きは反対でも、質量と速さが等しいためである。

(3) 状態 A と B の速さはいずれも $4\,\mathrm{m/s}$ なので、

$$\begin{aligned} K_A = K_B &= \frac{1}{2}(1.5\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

運動エネルギーは両方とも $12\,\mathrm{J}$ で等しい。一方、運動量は $+6.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ と $-6.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ で符号が異なる。

運動量はベクトルであり、運動エネルギーは向きを持たない量である。

2

(1) 合力は一定であるため、

$$\begin{aligned} J &= (+3\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{s}) \\ &= +12\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

(2) 初めは左向きなので、初速度は $-2\,\mathrm{m/s}$ である。

初めの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (1.5\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= -3.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= (-3.0\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+12\,\mathrm{N\,s}) \\ &= +9.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

終速度は、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+9.0\,\mathrm{kg\,m/s}}{1.5\,\mathrm{kg}} \\ &= +6.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

(3) 加速度は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{+3\,\mathrm{N}}{1.5\,\mathrm{kg}} \\ &= +2.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

速度変化は、

$$\begin{aligned} \Delta v &= (+2.0\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s}) \\ &= +8.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$v_{\text{後}} = (-2\,\mathrm{m/s}) + (+8.0\,\mathrm{m/s}) = +6.0\,\mathrm{m/s}$$

であり、(2) と一致する。

3

(1) 単位を換算すると、

$$250\,\mathrm{g} = 0.250\,\mathrm{kg}$$

$$40\,\mathrm{ms} = 0.040\,\mathrm{s}$$

である。

(2) 初めの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (0.250\,\mathrm{kg})(+6\,\mathrm{m/s}) \\ &= +1.50\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

終わりの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= (0.250\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= -0.50\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

運動量の変化は、

$$\begin{aligned} \Delta p &= (-0.50\,\mathrm{kg\,m/s}) - (+1.50\,\mathrm{kg\,m/s}) \\ &= -2.00\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

したがって、合力の力積は $-2.00\,\mathrm{N\,s}$ である。

(3) 平均合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av}} &= \frac{-2.00\,\mathrm{N\,s}}{0.040\,\mathrm{s}} \\ &= -50\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

負号は左向きを意味する。速度の向きが反転しているため、速さだけの差ではなく符号付き速度の差を使う必要がある。

4

(1) 初めの運動量は、

$$p_{\text{前}} = (0.80\,\mathrm{kg})(+5\,\mathrm{m/s}) = +4.0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

終わりは静止するので、

$$p_{\text{後}} = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} - (+4.0\,\mathrm{kg\,m/s}) \\ &= -4.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

合力の力積は A、B ともに $-4.0\,\mathrm{N\,s}$ である。

©ミライコーチング

(2) A の平均合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av,A}} &= \frac{-4.0\,\mathrm{N\,s}}{0.020\,\mathrm{s}} \\ &= -200\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

B の平均合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av,B}} &= \frac{-4.0\,\mathrm{N\,s}}{0.10\,\mathrm{s}} \\ &= -40\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

(3) A の平均合力の大きさは 200 N、B は 40 N であり、A は B の 5 倍である。

しかし、途中の力の変化は与えられていない。最大の力がどの時刻にどれだけ働いたかは、この情報だけでは分からないため、最大力の大小は断定できない。

5

(1) 合力は 0 N から +12 N まで直線的に増えるので、力–時刻グラフの下にできる図形は三角形である。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(3\,\mathrm{s})(+12\,\mathrm{N}) \\ &= +18\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

(2) 平均合力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{av}} &= \frac{+18\,\mathrm{N\,s}}{3\,\mathrm{s}} \\ &= +6.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

(3) 初めの運動量は、

$$p_{\text{前}} = (3\,\mathrm{kg})(-1\,\mathrm{m/s}) = -3\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

したがって、終わりの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= (-3\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+18\,\mathrm{N\,s}) \\ &= +15\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

終速度は、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+15\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} \\ &= +5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

初めは左向きであったが、終わりには右向きとなる。正の力積によって運動量の正方向成分が増えたためである。

6

(1) 0〜1 s の部分は、時間軸より上の三角形である。

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{s})(+6\,\mathrm{N}) \\ &= +3\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

1〜2 s の部分は、時間軸より下の三角形である。

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{s})(-6\,\mathrm{N}) \\ &= -3\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

©ミライコーチング

(2) 全区間の力積は、

$$\begin{aligned} J_{\text{全}} &= (+3\,\mathrm{N\,s}) + (-3\,\mathrm{N\,s}) \\ &= 0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。

したがって平均合力は、

$$F_{\text{av}} = \frac{0\,\mathrm{N\,s}}{2\,\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{N}$$

となる。

(3) 初めの運動量は、

$$p_0 = (1.5\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) = -3.0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

時刻 $1\,\mathrm{s}$ では、

$$\begin{aligned} p_1 &= (-3.0\,\mathrm{kg\,m/s}) + (+3\,\mathrm{N\,s}) \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、時刻 $1\,\mathrm{s}$ の速度は $0\,\mathrm{m/s}$ である。

時刻 $2\,\mathrm{s}$ では、

$$\begin{aligned} p_2 &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} + (-3\,\mathrm{N\,s}) \\ &= -3.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{-3.0\,\mathrm{kg\,m/s}}{1.5\,\mathrm{kg}} \\ &= -2.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

(4) 二つの面積の大きさの和は、

$$3\,\mathrm{N\,s} + 3\,\mathrm{N\,s} = 6\,\mathrm{N\,s}$$

である。

しかし、正味の力積は $0\,\mathrm{N\,s}$ である。

面積の大きさの和では正負を打ち消さないのに対し、正味の力積では正と負の符号を付けて足し合わせるためである。

全区間の運動量変化はゼロでも、途中では速度が $-2\,\mathrm{m/s}$ から $0\,\mathrm{m/s}$ へ変わっている。したがって、運動量が途中ずっと一定だったわけではない。

©ミライコーチング

7

(1) 合力の力積は運動量の変化に等しい。

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{p}_{後} - \vec{p}_{前} \\ &= (0-4,\ 3-0)\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= (-4, 3)\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

その大きさは、

$$\begin{aligned}|\,\vec{J}\,| &= \sqrt{(-4)^2+3^2}\,\mathrm{N\,s} \\ &= 5\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

である。

(2) 平均合力は、各成分について時間で割る。

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{av}} &= \frac{(-4, 3)\,\mathrm{N\,s}}{0.50\,\mathrm{s}} \\ &= (-8, 6)\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

となる。

その大きさは、

$$\begin{aligned}|\,\vec{F}_{\mathrm{av}}\,| &= \sqrt{(-8)^2+6^2}\,\mathrm{N} \\ &= 10\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

である。

(3) 初めの速度は、

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{前}} &= \frac{(4,0)\,\mathrm{kg\,m/s}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= (2,0)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となるので、初めの速さは $2\,\mathrm{m/s}$ である。

終わりの速度は、

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{後}} &= \frac{(0,3)\,\mathrm{kg\,m/s}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= (0,1.5)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となるので、終わりの速さは $1.5\,\mathrm{m/s}$ である。

終わりから初めを引いた速さの差は、

$$(1.5\,\mathrm{m/s}) - (2\,\mathrm{m/s}) = -0.5\,\mathrm{m/s}$$

である。

一方、速度変化は、

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v} &= (0-2,\ 1.5-0)\,\mathrm{m/s} \\ &= (-2,1.5)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

である。

その大きさは、

$$\begin{aligned}|\,\Delta\vec{v}\,| &= \sqrt{(-2)^2+(1.5)^2}\,\mathrm{m/s} \\ &= 2.5\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

速さの差と速度変化の大きさは一致しない。速度変化には二つの速度の向きの違いも反映されるためである。

8

(1) 右向きの力による力積は、

$$\begin{aligned}J_1 &= (+7\,\mathrm{N})(1.5\,\mathrm{s}) \\ &= +10.5\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

となる。

左向きの外力による力積は、

$$\begin{aligned}J_2 &= (-3\,\mathrm{N})(1.5\,\mathrm{s}) \\ &= -4.5\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

となる。

(2) 水平方向の合力は、

$$F_{\text{合}} = (+7\,\text{N}) + (-3\,\text{N}) = +4\,\text{N}$$

である。

したがって、合力の力積は、

$$\begin{aligned} J_{\text{合}} &= (+4\,\text{N})(1.5\,\text{s}) \\ &= +6.0\,\text{N s} \end{aligned}$$

である。

個別の力積の和でも、

$$(+10.5\,\text{N s}) + (-4.5\,\text{N s}) = +6.0\,\text{N s}$$

となる。

よって、運動量の変化は $+6.0\,\text{kg m/s}$ である。

(3) 初めの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{前}} &= (2\,\text{kg})(-1\,\text{m/s}) \\ &= -2\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

である。

終わりの運動量は、

$$\begin{aligned} p_{\text{後}} &= (-2\,\text{kg m/s}) + (+6.0\,\text{N s}) \\ &= +4.0\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって終速度は、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \frac{+4.0\,\text{kg m/s}}{2\,\text{kg}} \\ &= +2.0\,\text{m/s} \end{aligned}$$

である。

(4) 右向きの力が与える力積は $+10.5\,\text{N s}$ であるが、同じ時間に左向きの外力も $-4.5\,\text{N s}$ の力積を与えている。

運動量の変化に等しいのは、すべての外力を合成した合力の力積である。右向きの力だけを使うと左向きの外力による負の力積が抜けるため、終わりの運動量と速度を大きく見積もってしまう。

この問題では鉛直方向の重力と垂直抗力がつり合っているので、鉛直方向の合力の力積はゼロであり、水平成分の計算だけで終速度を求められる。