

第 83 講 等式の証明

学習目標

- ・ 等式を証明することと、方程式を解くことの違いを説明できる。
- ・ 片辺を変形し、もう一方の辺に一致させる形で等式を証明できる。
- ・ 左辺と右辺の差を計算し、それが 0 になることから等式を証明できる。
- ・ 両辺をそれぞれ共通の式へ整理して、等しいことを示せる。
- ・ 分数式を含む等式では、分母が 0 にならない条件を確認してから式変形できる。

等式を証明するとは

等式の証明では、ある文字の値を求めるのではなく、与えられた条件のもとで左辺と右辺が常に同じ値になることを示す。

例えば、

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

は、特定の x を求める式ではない。左辺を展開すると右辺になるため、すべての実数 x で成り立つ等式である。

前講の恒等式では、未知の係数を比較して値を決める問題も扱う。一方、この講では、すでに与えられた等式が正しいことを、展開・因数分解・通分などの正しい式変形によって示すことが中心である。

証明では、結論として示したい等式そのものを途中で勝手に使ってはならない。すでに正しいと分かっている公式や計算法則から出発し、1 つずつ正当な変形を積み重ねることが必要である。

等式の証明で使う 3 つの基本方針

等式 $A = B$ を証明するとき、入門段階では次の 3 つを使い分けるとよい。

1. 片辺 A を変形して B に一致させる。
2. 差 $A - B$ を計算して 0 になることを示す。
3. A と B をそれぞれ変形し、同じ式 C に一致させる。

どの方法でも、最後に「なぜ両辺が等しいといえるか」が明確になっていることが重要である。

解法の要点

証明する等式を前提として使わず、正しい展開・因数分解・通分から始める。分母がある式では先に定義域を確かめる。

1. 片辺を変形して他辺に一致させる

片辺だけを追う方法

左辺の方が展開しやすい、因数分解しやすいなど、変形の入口が見えやすいときは、片辺だけを変形する方法が使いやすい。

例えば $A = B$ を示したいとき、左辺から始めて

$$A = \dots = B$$

と到達できれば証明は完了する。

この方法では、途中で右辺を使って左辺を書き換えるのではなく、乗法公式や分配法則など、すでに成り立つ式変形だけを用いる。

例題 1

次の等式を証明せよ。

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = 8x$$

例題 1 の解答・解説

左辺は平方の差として因数分解できる。

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (x-2)^2 &= \{(x+2) - (x-2)\}\{(x+2) + (x-2)\} \\ &= 4 \cdot 2x \\ &= 8x\end{aligned}$$

したがって、左辺が右辺に一致するので、与えられた等式はすべての実数 x で成り立つ。展開によっても確認できる。

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (x-2)^2 &= (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\ &= 8x\end{aligned}$$

2. 両辺の差が 0 になることを示す**差をとる方法**

等式 $A = B$ は、両辺を移項した $A - B = 0$ と同じ内容である。そこで、左辺と右辺の差を整理して 0 になることを示せば、元の等式が成り立つと分かる。

特に、左右の式がどちらも複雑で、片辺だけを変形して相手に合わせる方針が見えにくいときに有効である。

ただし、差を計算するときも、展開や因数分解などの正しい変形を 1 行ずつ行うことが必要である。

例題 2

次の等式を証明せよ。

$$(x+2)^2 - 4x = (x-2)^2 + 4x$$

例題 2 の解答・解説

左辺から右辺を引く。

$$\begin{aligned} & \{(x+2)^2 - 4x\} - \{(x-2)^2 + 4x\} \\ &= (x^2 + 4x + 4) - 4x \\ & \quad - (x^2 - 4x + 4) - 4x \\ &= 0 \end{aligned}$$

差が 0 であるから、与えられた等式はすべての実数 x で成り立つ。
別の確認として、両辺をそれぞれ整理するとよい。

$$(x+2)^2 - 4x = x^2 + 4,$$

$$(x-2)^2 + 4x = x^2 + 4$$

両辺は同じ式 $x^2 + 4$ に一致している。

3. 両辺を共通の式へ整理する

同じ着地点を作る方法

左辺と右辺を別々に変形した方が見通しがよい場合もある。そのときは、両辺を同じ式へ整理すればよい。

例えば、左辺が C 、右辺も C になることを示せば、 $A = C$ 、 $B = C$ であるから $A = B$ と結論できる。

この方法は、左右の形が似ていて、どちらも展開すると同じ標準形になる場合に使いやすい。

分母があるときは定義域を先に確認する

分数式を含む等式では、分母が 0 になる値では式そのものが定義されない。

例えば、 $\frac{x^2-4}{x-2}$ を扱うなら $x \neq 2$ が必要である。 $x = 2$ では分母が 0 になるため、約分前の式を考えることができない。

また、両辺に分母を掛ける変形をするときは、その分母が 0 でないことを確認しておく必要がある。0 でない数を掛ける操作は元に戻せるため、等式の内容を保ったまま変形できる。

例題 3

$x \neq 2$ とする。次の等式を証明せよ。

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

例題 3 の解答・解説

条件 $x \neq 2$ より、 $x - 2 \neq 0$ である。分子を因数分解すると、

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= x + 2\end{aligned}$$

となる。したがって、定義域 $x \neq 2$ のすべての x で等式が成り立つ。
確認のため、両辺に 0 でない $x - 2$ を掛けると、

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

となる。右辺を展開すれば $x^2 - 4$ となり、同じ等式が確認できる。

演習問題

演習 1

次の等式を証明せよ。

$$(2x - 1)^2 - (x - 1)(3x + 1) = x^2 - 2x + 2$$

演習 2

次の等式を証明せよ。

$$(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 = 8ab$$

演習 3

次の等式を証明せよ。

$$(x + 3)^2 - 6x = (x - 3)^2 + 6x$$

演習 4

$x \neq -1$ とする。次の等式を証明せよ。

$$\frac{x^2 + x}{x + 1} = x$$

演習 5

$a \neq 0$ 、 $b \neq 0$ とする。次の等式を証明せよ。

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a - b)^2}{ab}$$

演習 6

次の等式を証明せよ。

$$(x+1)^3 + (x-1)^3 = 2x(x^2+3)$$

演習 7

$x \neq 1$ 、 $x \neq -1$ とする。次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

左辺を展開する。

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 - (x-1)(3x+1) \\&= (4x^2 - 4x + 1) - (3x^2 - 2x - 1) \\&= x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

よって、左辺が右辺に一致するので等式は成り立つ。

確認として左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned}(4x^2 - 4x + 1) - (3x^2 - 2x - 1) \\- (x^2 - 2x + 2) = 0\end{aligned}$$

となる。

演習 2 の解答・解説

左辺は平方の差である。

$$\begin{aligned}(a+2b)^2 - (a-2b)^2 &= \{(a+2b) - (a-2b)\} \\&\quad \cdot \{(a+2b) + (a-2b)\} \\&= 4b \cdot 2a \\&= 8ab\end{aligned}$$

よって等式は成り立つ。

展開によっても、

$$\begin{aligned}(a+2b)^2 - (a-2b)^2 &= (a^2 + 4ab + 4b^2) \\&\quad - (a^2 - 4ab + 4b^2) \\&= 8ab\end{aligned}$$

と確認できる。

演習 3 の解答・解説

両辺をそれぞれ整理する。

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 6x &= x^2 + 6x + 9 - 6x \\ &= x^2 + 9,\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + 6x &= x^2 - 6x + 9 + 6x \\ &= x^2 + 9\end{aligned}$$

である。両辺が同じ式 $x^2 + 9$ に一致するので、等式は成り立つ。
確認として左辺から右辺を引く。

$$\begin{aligned}\{(x+3)^2 - 6x\} - \{(x-3)^2 + 6x\} \\ &= (x^2 + 9) - (x^2 + 9) \\ &= 0\end{aligned}$$

演習 4 の解答・解説

条件 $x \neq -1$ より、 $x+1 \neq 0$ である。左辺の分子を因数分解すると、

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x}{x+1} &= \frac{x(x+1)}{x+1} \\ &= x\end{aligned}$$

となる。よって、定義域 $x \neq -1$ で等式は成り立つ。
確認として両辺に $x+1$ を掛けると、

$$x^2 + x = x(x+1)$$

となる。右辺を展開すれば左辺に一致する。

演習 5 の解答・解説

$a \neq 0$ 、 $b \neq 0$ より、 $ab \neq 0$ である。左辺を通分する。

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab}\end{aligned}$$

よって等式は成り立つ。
確認として両辺に ab を掛けると、

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

となり、右辺を展開すれば左辺に一致する。

演習 6 の解答・解説

左辺を展開する。

$$\begin{aligned}(x+1)^3 + (x-1)^3 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &\quad + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 2x^3 + 6x \\ &= 2x(x^2 + 3)\end{aligned}$$

よって等式は成り立つ。

別の確認では、和の立方の因数分解を用いる。 $A = x + 1$ 、 $B = x - 1$ とおくと、

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

である。また、

$$\begin{aligned}A + B &= 2x, \\ A^2 - AB + B^2 &= x^2 + 3\end{aligned}$$

であるから、同じ右辺 $2x(x^2 + 3)$ が得られる。

演習 7 の解答・解説

条件 $x \neq 1$ 、 $x \neq -1$ より、 $x - 1$ 、 $x + 1$ 、 $x^2 - 1$ はいずれも 0 ではない。左辺を通分する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

よって、定義域のすべての x で等式は成り立つ。

確認として両辺に 0 でない $x^2 - 1$ を掛けると、左辺は

$$(x+1) - (x-1) = 2$$

となり、右辺も 2 となる。