# 第 046 講 人工衛星の円運動

**この講でできるようになること**

- 天体の半径・衛星の高度・軌道半径を区別し、中心間距離を正しく求められる。
- 万有引力が向心力の役割を果たすことから、人工衛星の速さ・向心加速度・周期を求められる。
- 同じ天体を回る円軌道について、軌道半径の違いが速さや周期に与える影響を説明できる。
- 衛星内で無重量に感じられる理由を、重力と支持力の違いから説明できる。

## 1. 人工衛星はなぜ落ちてこないのか

地球の周りを回る人工衛星を考える。人工衛星は宇宙空間にあるため、重力が働いていないように感じられるかもしれない。

しかし、人工衛星にも地球の重力は働いている。人工衛星が地球の周りを回り続けられるのは、重力が消えたからではなく、重力によって運動する向きが絶えず変えられているからである。

例えば、地球の表面に向かって落ちる物体と、地球の周りを回る人工衛星は、どちらも地球からの重力を受けている。ただし、人工衛星は横向きにも十分な速さをもっているため、地球の中心に向かって曲がりながら進み、地球の表面に達することなく周回できる。

このように、人工衛星の運動は**重力による自由落下が続いている運動**として理解できる。

ただし、実際の人工衛星にはさまざまな条件が関係する。本講では、次の理想的な円軌道モデルを用いる。

- 天体は球対称であり、衛星はその外部を運動する。
- 天体の質量は衛星の質量に比べて十分に大きく、天体の中心をほぼ静止しているとみなせる。
- 衛星は天体の中心を中心とする円軌道を運動する。
- 大気抵抗、ほかの天体からの重力、推進装置による力などは考えない。
- 天体の自転による修正も考えず、天体の中心をほぼ静止とみなす慣性系で運動を調べる。

**人工衛星が周回する理由**

人工衛星は重力を受けながら運動している。

重力は人工衛星の速度の向きを変える働きをもち、理想的な円軌道では、人工衛星を円の中心へ向かって加速させる。

速さが一定であっても、速度の向きが変化しているため、加速度は 0 ではない。

## 2. 軌道半径と高度を区別する

人工衛星の円運動を式で表すには、まず距離の意味を明確にする必要がある。

©ミライコーチング

次の記号を使う。

| 記号 | 表す量 | 単位 |
|---|---|---|
| $M$ | 中心となる天体の質量 | kg |
| $m$ | 人工衛星の質量 | kg |
| $R$ | 天体の半径 | m |
| $h$ | 天体表面からの衛星の高度 | m |
| $r$ | 天体中心から衛星までの距離（軌道半径） | m |
| $G$ | 万有引力定数 | $\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ |

天体の表面から衛星までの高さが高度 $h$ である。一方、万有引力の式に使う距離は、天体の中心から衛星までの距離 $r$ である。

したがって、天体の外部を回る衛星では、

$$r = R + h$$

が成り立つ。

例えば、天体の半径が $6000\,\mathrm{km}$、衛星の高度が $4000\,\mathrm{km}$ ならば、

$$\begin{aligned} R &= 6000\,\mathrm{km} = 6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m} \\ h &= 4000\,\mathrm{km} = 4.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m} \\ r &= R + h \\ &= 1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

**万有引力の計算に高度 $h$ をそのまま代入してはいけない。** 必要なのは中心間距離 $r$ である。

### 円軌道を図で確認する

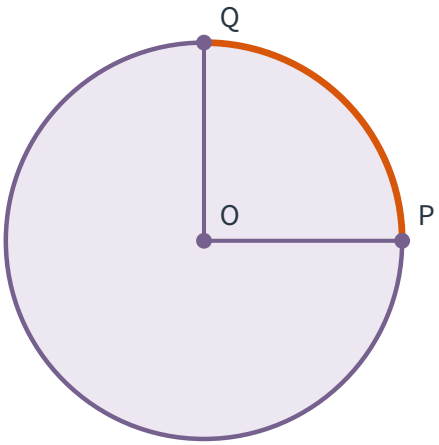


**図 1**　円周は中心 O を回る衛星の軌道で、天体の表面ではない。OP が軌道半径 r。反時計回りに P から Q へ動く。塗りは軌道内部を示し、天体の大きさを表さない。

この図の中心 $O$ は天体の中心であり、$P$ と $Q$ は人工衛星が通る位置を表す。

衛星は $P$ から $Q$ に向かって反時計回りに進む。$P$ では進行方向は上向きであり、$Q$ では左向きとなる。

円の中心から衛星までの距離は変化せず、

$$OP = OQ = r$$

である。

図に描かれた円周は**衛星の軌道**であり、天体の表面ではない。また、円の内側全体を天体と考えるわけではない。この図では天体の大きさを示していないため、半径 $R$ や高度 $h$ は直接読み取れない。

## 3. 万有引力が向心力になる

### 3.1 衛星に働く力

質量 $M$ の天体から、中心間距離 $r$ の位置にある質量 $m$ の人工衛星が受ける万有引力の大きさは、

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

である。

力の向きは、人工衛星から天体の中心へ向かう向きである。

本講の理想モデルでは、この万有引力が人工衛星に働く唯一の実在する力である。

一方、円運動をする物体には、円の中心へ向かう加速度が必要である。

©ミライコーチング

速さを $v$、軌道半径を $r$ とすると、向心加速度の大きさは、

$$a = \frac{v^2}{r}$$

で表される。

運動方程式より、中心向きの合力の大きさは、

$$F_{\text{合}} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

この中心向きの合力を**向心力**と呼ぶ。

人工衛星の場合は、万有引力が中心向きの合力をすべて担っているため、

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

が成り立つ。

**向心力を別の力として加えない**

向心力は、円運動に必要な中心向きの合力を表す名前である。

人工衛星では、万有引力そのものが向心力の役割を果たしている。万有引力とは別に、もう一つ「向心力」という力が働くわけではない。

また、本講で用いる慣性系では、外向きの遠心力を追加して万有引力とつり合わせることもしない。

衛星には中心向きの合力と加速度がある。

## 3.2 円軌道を回る速さ

万有引力と向心力の式から、人工衛星の速さを求める。

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

衛星の質量 $m$ は 0 ではないので、両辺を $m$ で割る。

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

さらに両辺に $r$ を掛ける。

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

速さ $v$ は 0 以上であるから、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

となる。

**円軌道の速さ**

天体の中心をほぼ静止とみなせる理想的な円軌道では、人工衛星の速さは、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

である。

この関係は、天体の万有引力だけが衛星の向心力となる条件から導かれる。

この式から、次の二つが読み取れる。

第一に、同じ天体を回る円軌道では、軌道半径 $r$ が大きいほど速さ $v$ は小さくなる。

第二に、速さの式には衛星の質量 $m$ が含まれていない。天体が同じで軌道半径も同じなら、衛星の質量が違っても円軌道の速さは同じになる。

ただし、これは $m \ll M$ として中心天体の運動を無視するモデルでの結論である。また、**衛星に働く重力そのものが衛星の質量に依存しないわけではない**。

重力の大きさ $F = GM\frac{m}{r^2}$ は、衛星の質量 $m$ に比例する。

### 3.3 $GM$ を一つの量として扱う

円軌道の計算では、万有引力定数 $G$ と天体質量 $M$ の積が繰り返し現れる。

そこで、

$$\mu = GM$$

とおくことがある。

$\mu$ の単位は、

$$\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

である。

これを使うと、

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

と書ける。

$\mu$ は中心天体によって決まる量である。**別の天体に変わった場合、同じ値を使えるとは限らない**。

また、$G$ は万有引力定数であり、$g$ はある位置での重力加速度を表す。両者は異なる量である。

### 3.4 向心加速度

円軌道の向心加速度は、

$$a = \frac{v^2}{r}$$

である。

ここに $v^2 = G\frac{M}{r}$ を代入すると、

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

となる。

$\mu = GM$ を使えば、

$$a = \frac{\mu}{r^2}$$

である。

この加速度は天体中心へ向かっている。

人工衛星の速さは一定であるが、速度の向きが変化し続けるため、加速度は 0 ではない。

なお、この位置での重力加速度の大きさも $G\frac{M}{r^2}$ である。衛星が重力だけで円運動する場合、重力加速度がそのまま向心加速度になっている。

## 4. 人工衛星の周期を求める

人工衛星が円軌道を 1 周する時間を周期 $T$ と呼ぶ。

半径 $r$ の円の周の長さは、

$$2\pi r$$

である。

速さが一定ならば、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

となる。

ここに円軌道の速さ $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ を代入する。

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} \\ &= 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \end{aligned}$$

したがって、

**円軌道の周期**

人工衛星が理想的な円軌道を 1 周する周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

である。

$\mu = GM$ を使う場合は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

となる。

速さの式と同様に、周期の式にも衛星の質量 $m$ は含まれていない。

ただし、中心天体の質量 $M$ には依存するため、異なる天体を回る衛星を比較するときは注意が必要である。

### 軌道半径が大きくなるとどうなるか

同じ天体を回る二つの円軌道を考える。

天体が同じなら、$GM$ は共通である。

速さ、周期、向心加速度には、次の関係がある。

| 比較する量 | 軌道半径 $r$ との関係 | $r$ が大きくなると |
|---|---|---|
| 速さ $v$ | $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ | 小さくなる |
| 周期 $T$ | $T \propto r^{\frac{3}{2}}$ | 大きくなる |
| 向心加速度 $a$ | $a \propto \frac{1}{r^2}$ | 小さくなる |

ここで $\propto$ は「ほかの条件を一定にしたとき、その式に示された量に比例する」ことを表す。

例えば、軌道半径を 4 倍にすると、

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

となる。

つまり、**軌道半径が 4 倍の円軌道では、速さは半分、周期は 8 倍、向心加速度は 16 分の 1** である。

**比較では中心天体を固定する**

同じ天体を回る二つの円軌道では、$GM$ が共通なので、軌道半径の比だけから速さや周期の比を求められる。

ただし、この比較は異なる半径の円軌道がそれぞれ存在すると仮定したものである。一方の軌道を回る衛星が速さだけを変更すると、直ちに別の円軌道へ移るという意味ではない。

また、高度 $h$ が 4 倍になったことと、軌道半径 $r = R + h$ が 4 倍になったことは同じではない。

### 周期の式を別の形にする

周期の式を 2 乗すると、

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

となる。

したがって、

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

である。

同じ天体を回る円軌道では、右辺が共通の値となる。

この関係は、周期と軌道半径についての計算結果が整合しているかを確かめるのにも使える。

## 5. 具体的な数値で円軌道を調べる

ここからは、計算を通して式の意味を確かめる。

以下の基準となる天体モデルを用いる。

$$\mu = GM = 4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$$

$$R = 6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

これらは計算練習のための理想的な設定値である。

また、基準となる円軌道を、

$$r_0 = 1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$$

とする。この軌道の高度は、

$$\begin{aligned} h_0 &= r_0 - R \\ &= 4.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

**例題 1**

質量 $1000\,\mathrm{kg}$ の人工衛星が、次の天体の周りを円運動している。

$$GM = 4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$$

$$R = 6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

$$r = 1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$$

**(1)** 人工衛星の速さ $v$ を求めよ。

**(2)** 人工衛星の向心加速度の大きさ $a$ を求めよ。

**(3)** 人工衛星に働く万有引力の大きさ $F$ を求めよ。

**(4)** 人工衛星の周期 $T$ を求め、秒と時間で表せ。

**解答・解説**

**(1)** 万有引力が向心力となるので、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

を使う。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}}} \\ &= \sqrt{4.0 \times 10^{7}}\,\mathrm{m/s} \\ &= 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 6324.56\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

したがって、速さは約 $6.32 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s}$ である。

**(2)** 向心加速度は、

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

から求められる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{\left(1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}\right)^2} \\ &= 4.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

よって、向心加速度の大きさは $4.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。向きは天体中心向きである。

**(3)** 衛星に働く重力の大きさは、

$$F = ma$$

より、

$$\begin{aligned} F &= (1000\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 4000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

この $4000\,\mathrm{N}$ の重力が向心力の役割を果たしている。

**(4)** 周期は、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

を用いて求める。

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi(1.0\times10^{7}\,\mathrm{m})}{2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}} \\ &= \frac{10000\pi}{\sqrt{10}}\,\mathrm{s} \\ &\approx 9934.59\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

$1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$ なので、

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{9934.59\,\mathrm{s}}{3600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 2.76\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

となる。

したがって、周期は約 $9935\,\mathrm{s}$、すなわち約 $2.76\,\mathrm{h}$ である。

この計算で使った $r$ は、高度 $4.0\times10^{6}\,\mathrm{m}$ ではなく、中心間距離 $1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$ である。

**例題 2**

例題 1 と同じ天体の周りに、別の人工衛星が円軌道を描いている。

二つの軌道半径を、

$$r_1 = 1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$$

$$r_2 = 4.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$$

とする。

**(1)** 軌道半径 $r_2$ に対応する高度 $h_2$ を求めよ。

**(2)** それぞれの円軌道の速さの比 $\frac{v_2}{v_1}$ と、$v_2$ の値を求めよ。

**(3)** 向心加速度の比 $\frac{a_2}{a_1}$ と、$a_2$ の値を求めよ。

**(4)** 周期の比 $\frac{T_2}{T_1}$ と、$T_2$ の値を求めよ。

**解答・解説**

**(1)** 高度は中心間距離から天体半径を引く。

$$\begin{aligned} h_2 &= r_2 - R \\ &= 4.0\times10^{7}\,\mathrm{m} - 6.0\times10^{6}\,\mathrm{m} \\ &= 3.4\times10^{7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

**(2)** 同じ天体の円軌道なので $GM$ は共通である。

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例題 1 の速さを使うと、

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2}\left(2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}\right) \\ &= 1000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 3162.28\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

**(3)** 向心加速度は $r$ の 2 乗に反比例する。

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{16}(4.0\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 0.25\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

**(4)** 周期は $r^{\frac{3}{2}}$ に比例する。

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 4^{\frac{3}{2}} \\ &= 8\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}T_2 &= 8T_1 \\ &\approx 8(9934.59\,\mathrm{s}) \\ &\approx 79476.7\,\mathrm{s} \\ &\approx 22.1\,\mathrm{h}\end{aligned}$$

である。

軌道半径が 4 倍になったとき、速さは半分になる一方、1 周に必要な道のりは 4 倍になる。

そのため、周期は、

$$4 \div \frac{1}{2} = 8$$

より 8 倍になる。

ここで比較したのは、同じ天体の周りに存在する二つの異なる円軌道である。衛星を一方から他方へ移動させる過程は扱っていない。

## 6. 高度と天体半径の関係を図で読む

人工衛星の問題では、「天体表面からの高度が天体半径の 2 倍」のような条件が与えられることもある。

このとき、

$$h = 2R$$

であるから、

$$r = R + h = 3R$$

となる。

次の図では、天体の断面と衛星の位置を同時に示す。

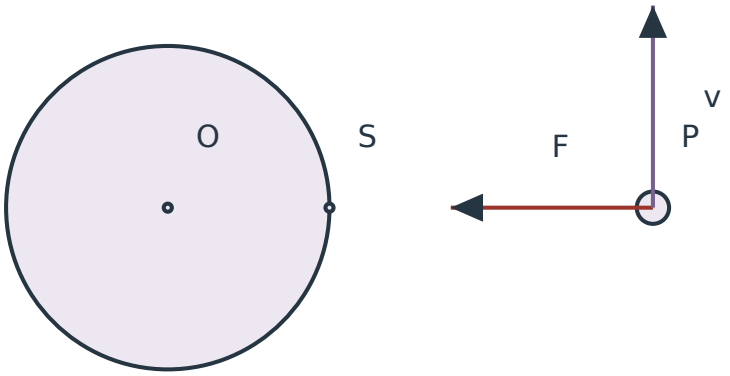


**図 2**　球対称天体の中心 O、球面 S、衛星 P。OS は R、SP は h=2R、OP は r=3R。P の重力 F は左、速度 v は上。v は力ではなく、矢印長に力と速度の共通尺度はない。軌道の円周は図 1 を参照。

この図では、円形に描かれた天体の断面の半径が $R$ である。前の円軌道図とは異なり、円全体が天体の断面を表す。

$O$ は天体の中心、$S$ は天体表面上の点、$P$ は人工衛星の位置である。

図中の距離は、

$$OS : SP : OP = 1 : 2 : 3$$

に対応する。

したがって、

$$OS = R, \qquad SP = 2R, \qquad OP = 3R$$

である。

また、$P$ から左向きの矢印 $F$ は万有引力を、上向きの矢印 $v$ は速度を表す。

力と速度は異なる物理量である。図中ではそれぞれの向きを示しており、二つの矢印の長さに共通の物理的尺度はない。

特に、速度の矢印を追加の力と解釈してはいけない。

**例題 3**

半径 $R = 6.0 \times 10^6\,\mathrm{m}$ の球対称な天体の周りを、人工衛星が高度 $h = 2R$ の円軌道で運動している。

万有引力に関する天体の値は、

$$GM = 4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$$

とする。

**(1)** 軌道半径 $r$ を求めよ。

**(2)** 向心加速度の大きさ $a$ を求めよ。

**(3)** 速さ $v$ を求めよ。

**(4)** 周期 $T$ を秒と時間で求めよ。

**解答・解説**

**(1)** 高度が $2R$ であるから、

$$\begin{aligned} r &= R + h \\ &= 3R \\ &= 3(6.0 \times 10^6\,\mathrm{m}) \\ &= 1.8 \times 10^7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

**(2)** 向心加速度は、

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

である。

$$\begin{aligned} a &= \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(1.8 \times 10^7\,\mathrm{m})^2} \\ &= \frac{100}{81}\,\mathrm{m/s^2} \\ &\approx 1.23457\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

したがって、約 $1.23\,\mathrm{m/s^2}$ である。

**(3)** 円軌道の速さは、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

である。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{1.8 \times 10^{7}\,\mathrm{m}}} \\ &= \frac{10000\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 4714.05\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

よって、速さは約 $4.71 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s}$ である。

**(4)** 周期は、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

より、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi(1.8 \times 10^{7}\,\mathrm{m})}{\left(10000\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\mathrm{m/s}} \\ &= 5400\sqrt{2}\pi\,\mathrm{s} \\ &\approx 23991.6\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

となる。

時間に直すと、

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{23991.6\,\mathrm{s}}{3600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 6.66\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

である。

ここでも、高度 $h = 2R$ を軌道半径として計算してはいけない。正しい軌道半径は $r = 3R$ である。

## 7. 無重量と無重力は同じではない

宇宙ステーション内で宇宙飛行士が浮いている映像を見たことがあるだろう。

この状態は、日常的に「無重力」と呼ばれることもある。しかし、物理的には重力が 0 になっているわけではない。

地球の周りを回る宇宙ステーションには、地球の重力が働いている。内部にいる宇宙飛行士にも重力が働く。

それにもかかわらず、宇宙飛行士が浮いているように見えるのはなぜだろうか。

## 7.1 重力と支持力

普段、床の上に立っている人には、地球からの重力が下向きに働く。

一方、床からは人を支える上向きの力が働く。このような接触によって物体を支える力を支持力と呼ぶ。

体重計が測っているのは、人に働く重力そのものではなく、体重計との接触によって生じる力である。静止して立っている場合には、体重計から人への支持力の大きさが重力と等しくなる。

ところが、人工衛星の内部では、衛星も人もほぼ同じ重力加速度で天体中心に向かって自由落下している。

そのため、衛星内部で人が接触せずに浮いている場合、床や体重計から身体を支えてもらう必要がない。

近傍の重力加速度の差を無視できる局所的な近似では、理想的な体重計の読みはほぼ 0 になる。

このように、重力は働いているが、支持力をほぼ感じない状態を**無重量状態**という。

## 7.2 重力があるのに体重計が 0 を示す

二つの力を区別しておく。

| 量 | 何を表すか | 衛星内部での状態 |
|---|---|---|
| 万有引力 | 天体が人を引く力 | 0 ではない |
| 支持力 | 床・体重計などが人を支える接触力 | 局所的な自由落下ではほぼ 0 |
| 重力加速度 | 天体の重力による加速度 | 0 ではない |
| 体重計の読み | 接触による支持力に対応する値 | 理想的な無重量状態ではほぼ 0 |

ここで、自由落下とは重力だけを受けて運動することである。必ずしも地面に向かって一直線に落ちる運動だけを意味するわけではない。

本講の円軌道を回る衛星も、重力だけを受ける自由落下の一例である。

**例題 4**

例題 1 と同じ天体の周りを、軌道半径 $r = 1.0 \times 10^{7}\ \mathrm{m}$ で円運動する人工衛星を考える。

$$GM = 4.0 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$$

衛星内部には質量 $60\,\mathrm{kg}$ の人がいる。

人は衛星内部で浮いており、床や壁などには接触していない。人と衛星の位置のわずかな違いによる重力加速度の差は無視する。

**(1)** 人に働く万有引力の大きさと向きを求めよ。

**(2)** 人の加速度の大きさと向きを求めよ。

**(3)** この人に働く床からの支持力はいくらか。

**(4)** 無重量状態を理想的な体重計で測ると、読みがほぼ 0 になる理由を説明せよ。

**解答・解説**

**(1)** この位置での重力加速度の大きさは、

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 4.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

したがって、重力の大きさは、

$$\begin{aligned} F &= mg(r) \\ &= (60\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 240\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

向きは天体中心向きである。

**(2)** 人には重力だけが働いているため、

$$a = g(r) = 4.0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。向きは天体中心向きである。

衛星と人は、ほぼ同じ加速度で自由落下している。

**(3)** 人は床に接触していないので、床から受ける支持力は、

$$N_{\text{支持}} = 0\,\mathrm{N}$$

である。

**(4)** 人も体重計も衛星とともに自由落下しているため、局所的な近似では人を支える接触力がほぼ不要となる。

したがって、理想的な体重計が示す支持力に対応した読みは、ほぼ 0 N となる。

ただし、人には 240 N の重力が働いている。

**重力 240 N と支持力 0 N は、異なる力を表す値である。**

### 無重量は重力が 0 という意味ではない

無重量状態の衛星内部でも、天体の重力は働いている。

重力が 0 でないので、衛星や内部の人の加速度も 0 ではない。慣性系で重力と別の力がつり合って静止しているわけでもない。

本講では衛星内部の狭い範囲で重力加速度の差を無視している。実際には位置によるわずかな重力の違いなどがあるため、完全に同じ運動になるとは限らない。

# 演習問題

以下の演習では、特に断らない限り、球対称な天体の外部を人工衛星が理想的な円軌道で回るものとする。衛星の質量は天体の質量に比べて十分に小さく、大気抵抗・推進力・ほかの天体による影響は無視する。

### 基準天体の条件

演習 1・2・4・5 では、必要に応じて次の共通モデルを用いる。

$$GM = 4.0 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$$

$$R = 6.0 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$$

$$r_0 = 1.0 \times 10^{7}\ \mathrm{m}$$

**演習 1**

基準天体の周りを、二つの人工衛星 A、B が同じ軌道半径 $r_0$ の円軌道で回っている。

A の質量は 1000 kg、B の質量は 2000 kg である。

**演習 1(1)** A、B に働く万有引力の大きさをそれぞれ求めよ。

**演習 1(2)** A、B の向心加速度の大きさをそれぞれ求めよ。

**演習 1(3)** A、B の速さと周期は等しいか、それとも異なるか。理由とともに説明せよ。

**演習 1(4)** 「円軌道の速さの式に衛星の質量が現れないので、衛星に働く万有引力も衛星の質量に関係しない」という説明は正しいか。理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」。

**演習 2**

基準天体の周りに、速さ 4000 m/s で円運動する人工衛星がある。

この人工衛星は、基準軌道 $r_0$ とは別の円軌道を回っているとする。

**演習 2(1)** この人工衛星の軌道半径 $r$ を求めよ。

**演習 2(2)** 天体表面からの高度 $h$ を求めよ。

**演習 2(3)** 周期 $T$ を求め、秒と時間で表せ。

**演習 2(4)** 「速さが 4000 m/s である」という条件から求めた軌道について、速さだけを瞬間的に変更すれば、ほかの円軌道から直ちにこの円軌道へ移れると結論づけてよいか。説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」。

©ミライコーチング

**演習 3**

ある球対称な天体の外部で、人工衛星が理想的な円軌道を運動している。

観測から、軌道半径と周期が次のように分かった。

$$r = 8.0 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$$

$$T = 8000\pi\ \mathrm{s}$$

この天体は、それまでの演習に登場した基準天体とは別の天体である。

必要であれば、万有引力定数として、

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$$

を用いよ。

**演習 3(1)** 人工衛星の速さ $v$ を求めよ。

**演習 3(2)** この天体の $GM$ を求めよ。

**演習 3(3)** 天体の質量 $M$ を求めよ。

**演習 3(4)** 基準天体と軌道半径が同じであれば、この天体を回る衛星の速さも必ず同じになるか。理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」。

**演習 4**

基準天体の周りを回る二つの円軌道を考える。

内側の軌道を 1、外側の軌道を 2 とする。いずれも同じ中心天体を回る理想的な円軌道である。

**演習 4(1)** 周期が $T_2 = 8T_1$ であるとき、軌道半径の比 $\dfrac{r_2}{r_1}$ を求めよ。

**演習 4(2)** 演習 4(1)の条件で、速さの比 $\dfrac{v_2}{v_1}$ を求めよ。

**演習 4(3)** 別の二つの円軌道について、周期が $T_2 = 2T_1$ であるとき、軌道半径の比 $\dfrac{r_2}{r_1}$ を求めよ。

**演習 4(4)** 周期が 2 倍になった場合、軌道半径も 2 倍になるという判断は正しいか。式を用いて説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」。

**演習 5**

基準天体について、衛星が天体の表面すれすれを回る理想的な円軌道を考える。

この問題に限り、天体の地形や大気を無視し、軌道半径を $r = R$ とする限界モデルを用いる。

$$GM = 4.0 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$$

$$R = 6.0 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$$

**演習 5(1)** この円軌道の向心加速度の大きさを求めよ。

**演習 5(2)** この円軌道を回る速さを求めよ。

**演習 5(3)** この計算結果を、そのまま現実の地表すれすれの人工衛星の運動に適用してよいか。理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」。

**演習 6**

ある球対称な天体の周りを、人工衛星が反時計回りの理想的な円軌道で運動している。

天体の中心を $O$、衛星の位置を円軌道の右端の点 $P$ とする。衛星には天体からの万有引力だけが働いている。

**演習 6(1)** 点 $P$ における衛星の速度、加速度、万有引力の向きをそれぞれ答えよ。

**演習 6(2)** 「衛星には万有引力と向心力が別々に働くため、中心向きの合力は両者の和になる」という説明の誤りを指摘せよ。

**演習 6(3)** 「衛星は一定の速さで周回しているので、慣性系では重力と遠心力がつり合い、加速度は 0 になる」という説明の誤りを指摘せよ。

**演習 6(4)** ある人工衛星の周期が天体の自転周期と同じであることだけから、「その衛星は地表の同じ地点の上空に静止して見える」と判断できるか。理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 6 の解答・解説」。

# 演習問題の解答・解説

## 演習 1 の解答・解説

**演習 1(1)** A に働く万有引力は 4000 N、B に働く万有引力は 8000 N である。

万有引力は、

$$F = \frac{GMm}{r_0^2}$$

で求められる。

A について、

$$F_A = \frac{(4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(1000\,\mathrm{kg})}{(1.0\times10^{7}\,\mathrm{m})^2}$$
$$= 4000\,\mathrm{N}$$

となる。

B は同じ中心間距離にあり、質量が A の 2 倍なので、

$$F_B = 2F_A$$
$$= 8000\,\mathrm{N}$$

である。どちらの重力も天体中心向きに働く。

**演習 1(2)** A、B の向心加速度は、どちらも $4.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。

円軌道の加速度は、

$$a = \frac{GM}{r_0^2}$$

であるから、

$$a_A = a_B = \frac{4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(1.0\times10^{7}\,\mathrm{m})^2}$$
$$= 4.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

質量が 2 倍になると重力も 2 倍になるが、加速度を求める際には質量で割るため、加速度は変わらない。

**演習 1(3)** A と B の速さも周期も等しい。

円軌道の速さと周期は、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

および、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$$

で表される。

どちらの式にも衛星の質量は含まれていない。今回のように同じ天体の同じ半径の円軌道なら、

$$v_A = v_B = 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$$
$$\approx 6324.56\,\mathrm{m/s}$$

および、

$$T_A = T_B = \frac{10000\pi}{\sqrt{10}}\,\mathrm{s}$$
$$\approx 9934.59\,\mathrm{s}$$

となる。

**演習 1(4)** この説明は誤りである。

速さの式から衛星の質量が消えるのは、重力 $GM\frac{m}{r^2}$ を衛星の質量 $m$ で割って加速度を求めるためである。

一方、実際に衛星に働く万有引力は、

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

であり、同じ $GM$ と $r$ なら衛星の質量 $m$ に比例する。

したがって、重力の大きさは衛星の質量に依存するが、理想的な円軌道の速さと周期は衛星の質量に依存しない。

## 演習 2 の解答・解説

**演習 2(1)** 軌道半径は $2.5 \times 10^7\,\mathrm{m}$ である。

円軌道の速さは、

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

であるから、

$$r = \frac{GM}{v^2}$$

と変形できる。

数値を代入すると、

$$r = \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(4000\,\mathrm{m/s})^2}$$
$$= 2.5 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

となる。

**演習 2(2)** 高度は $1.9 \times 10^7\,\mathrm{m}$ である。

中心間距離と高度の関係から、

$$\begin{aligned} h &= r - R \\ &= 2.5 \times 10^{7}\,\mathrm{m} - 6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m} \\ &= 1.9 \times 10^{7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

**演習 2(3)** 周期は $12500\pi\,\mathrm{s}$、約 $10.9\,\mathrm{h}$ である。

円軌道の周期は、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

である。

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi\left(2.5 \times 10^{7}\,\mathrm{m}\right)}{4000\,\mathrm{m/s}} \\ &= 12500\pi\,\mathrm{s} \\ &\approx 39269.9\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

時間に換算すると、

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{39269.9\,\mathrm{s}}{3600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 10.9\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

である。

**演習 2(4)** そのように結論づけることはできない。

今回の計算は、速さ $4000\,\mathrm{m/s}$ で円運動している状態がすでに成立していると仮定し、その条件に対応する円軌道半径を求めたものである。

別の円軌道上で速さだけを瞬間的に変更した場合、その位置と速度の向きなどの条件に応じて、その後の軌道が決まる。

したがって、速さの変更だけで直ちに別の円軌道が成立すると考えてはいけない。

## 演習 3 の解答・解説

**演習 3(1)** 衛星の速さは $2000\,\mathrm{m/s}$ である。

半径 $r$ の円軌道を周期 $T$ で 1 周するので、

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

である。

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi\left(8.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m}\right)}{8000\pi\,\mathrm{s}} \\ &= 2000\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

**演習 3(2)** この天体の $GM$ は $3.2 \times 10^{13}\,\mathrm{m^3/s^2}$ である。

万有引力が向心力となる条件から、

$$GM = v^2 r$$

である。

したがって、

$$GM = (2000\,\mathrm{m/s})^2 (8.0 \times 10^6\,\mathrm{m})$$
$$= 3.2 \times 10^{13}\,\mathrm{m^3/s^2}$$

となる。

周期の式から求める場合も、

$$GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

に観測値を代入すれば、同じ結果となる。

**演習 3(3)** 天体の質量は約 $4.80 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$ である。

$GM$ の値と万有引力定数 $G$ から、

$$M = \frac{GM}{G}$$

を用いる。

$$M = \frac{3.2 \times 10^{13}\,\mathrm{m^3/s^2}}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}}$$
$$\approx 4.80 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$$

となる。

ここでは $G$ の単位に含まれる N が $\mathrm{kg\,m/s^2}$ に対応するため、結果の単位は kg となる。

**演習 3(4)** 軌道半径が同じでも、中心天体が違えば速さは必ずしも同じにならない。

円軌道の速さは、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

である。

同じ $r$ でも、天体質量 $M$ が違えば $GM$ が異なり、速さも変わる。

今回の天体の $GM$ は $3.2 \times 10^{13}\,\mathrm{m^3/s^2}$ であり、基準天体の $4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$ とは異なる。

したがって、別天体を比較する際に基準天体の $GM$ を流用してはいけない。

## 演習 4 の解答・解説

**演習 4(1)** 軌道半径の比は $\frac{r_2}{r_1} = 4$ である。

同じ天体の円軌道では、

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

である。

$\frac{T_2}{T_1} = 8$ なので、

$$8 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

両辺を $\frac{2}{3}$ 乗すると、

$$\begin{aligned}\frac{r_2}{r_1} &= 8^{\frac{2}{3}} \\ &= 4\end{aligned}$$

である。

**演習 4(2)** 速さの比は $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$ である。

$$\begin{aligned}\frac{v_2}{v_1} &= \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって、周期が 8 倍の外側の円軌道では、速さは内側の円軌道の半分になる。

**演習 4(3)** 軌道半径の比は $2^{\frac{2}{3}}$ である。

周期が 2 倍なので、

$$2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{r_2}{r_1} &= 2^{\frac{2}{3}} \\ &\approx 1.59\end{aligned}$$

となる。

**演習 4(4)** 周期が 2 倍なら軌道半径も 2 倍になるという判断は誤りである。

周期は軌道半径そのものではなく、軌道半径の $\frac{3}{2}$ 乗に比例する。

実際に軌道半径を 2 倍にした場合は、

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= 2^{\frac{3}{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \\ &\approx 2.83\end{aligned}$$

となり、周期は 2 倍ではない。

周期を 2 倍にしたい場合の軌道半径の比は、演習 4(3)で求めた $2^{\frac{2}{3}}$、約 1.59 倍である。

## 演習 5 の解答・解説

**演習 5(1)** 向心加速度の大きさは $\frac{100}{9}\,\mathrm{m/s^2}$、約 $11.1\,\mathrm{m/s^2}$ である。

限界モデルでは、

$$r = R$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} a &= \frac{GM}{R^2} \\ &= \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m})^2} \\ &= \frac{100}{9}\,\mathrm{m/s^2} \\ &\approx 11.1111\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

**演習 5(2)** 円軌道の速さは約 $8165\,\mathrm{m/s}$ である。

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

より、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{6.0 \times 10^{6}\,\mathrm{m}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 10^{8}}{3}}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 8164.97\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

**演習 5(3)** この結果を、そのまま現実の地表すれすれの衛星の運動に適用することはできない。

今回の計算では、地形と大気を無視している。

実際の地表付近には地形や大気が存在するため、天体表面すれすれの円軌道を、抵抗や衝突を考えずに維持できるとは限らない。

したがって、求めた速さは、あくまで天体の表面で大気や地形の影響を無視した理想的な円軌道の限界値である。

## 演習 6 の解答・解説

**演習 6(1)** 点 $P$ では、速度は上向き、加速度と万有引力は左向きである。

衛星は反時計回りに運動しているため、円軌道の右端では接線方向が上向きとなる。

一方、万有引力は天体中心 $O$ に向かって働く。点 $P$ から中心 $O$ は左側にあるので、万有引力の向きは左向きである。

重力が向心力となっているため、加速度も左向きである。

**演習 6(2)** 万有引力と向心力を別々の力として加えている点が誤りである。

向心力とは、円運動する物体に働く中心向きの合力を表す名前である。

本講の理想モデルでは、人工衛星に働く実在力は万有引力だけなので、

$$F_{\text{合}} = F_{\text{重力}}$$

である。

この合力が、

$$F_{\text{合}} = \frac{mv^2}{r}$$

を満たす。

重力とは別に向心力を加えると、同じ力を二重に数えてしまう。

**演習 6(3)** 慣性系で遠心力を追加して重力とつり合わせ、加速度を 0 としている点が誤りである。

本講では天体の中心をほぼ静止とみなす慣性系を使っている。この系で衛星に働く実在力は中心向きの万有引力であり、中心向きの加速度が生じる。

速さが一定であっても、速度の向きが変化しているため、

$$a = \frac{v^2}{r}$$

は 0 ではない。

したがって、慣性系では重力が別の外向きの力とつり合っているとは考えない。

**演習 6(4)** 周期が等しいという条件だけでは、地表の同じ地点の上空に静止して見えるとは判断できない。

周期が同じであることは、衛星が 1 周するのに必要な時間と天体の自転周期が等しいことを意味する。

しかし、地表の同じ地点から静止して見えるためには、周回方向や軌道面などについても適切な条件が必要である。

したがって、**周期の一致だけでは地表から静止して見えることの十分な条件にならない**。