

第 57 講 順列

学習目標

- 異なる n 個から r 個を選んで順に並べる順列の意味を説明できる。
- 順序が違えば別の場合として数えることを判断できる。
- 積の法則を使って ${}_nP_r$ の式を作り、基本的な計算ができる。
- 異なる n 個すべてを並べる場合の数を $n!$ で表せる。

「選ぶ」だけでなく「並べる順序」も区別する

ABC と BAC は別の場合

異なる 4 文字 A, B, C, D から 3 文字を選んで横一列に並べるを考えます。
たとえば、

$$ABC$$

と、

$$BAC$$

では、使っている文字はどちらも A, B, C です。

しかし、並んでいる順序が違います。

順列では、この 2 つを別の場合として数えます。

つまり、順列の問題では、

何を選んだかだけでなく、どの順番に並べたか

まで区別します。

順列

異なる n 個のものから r 個を選び、順序をつけて一列に並べたものを**順列**といいます。
その順列の総数を、

$${}_nP_r$$

と表します。

順列を見分ける言葉

次のような場面では、順列を考えます。

- 順に並べる
- 1 番目、2 番目、3 番目を決める
- 異なる場所に順番に配置する

順序が変わると別の場合になることを確認します。

同じものを含む場合はこの講では扱わない

この講では、並べるものはすべて異なるものとします。

同じものを含む並べ方は、この講の順列とは区別します。

積の法則から順列を作る

選べる数が1つずつ減る

異なる5個のものから3個を選んで順に並べる場合を考えます。

1番目には、5個のどれでも置けるので5通りあります。

1個使ったあとは残り4個なので、2番目は4通りです。

さらに1個使ったあとは残り3個なので、3番目は3通りです。

したがって、積の法則より、並べ方は、

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

通りです。

これは60通りです。

同じものをもう一度使わないので、選択枝数が、

$$5, 4, 3$$

と1つずつ減っていきます。



順列の本質

異なるものを重複なく順に並べると、

- 1番目は n 通り
- 2番目は $n - 1$ 通り
- 3番目は $n - 2$ 通り

と、選べる数が1つずつ減ります。

これを積の法則で掛けるのが順列の計算です。

nPr の式

順列の数

異なる n 個から r 個を選んで順に並べる順列の数は、

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

です。

右辺には、 n から始めて1ずつ小さくした数を、全部で r 個掛けます。

最後の数が $n-r+1$ になる理由

たとえば ${}_7P_4$ なら、7から始めて4個の数を掛けます。

使う数は、

$$7, 6, 5, 4$$

です。

したがって、

$${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

です。

最後の数は、

$$7 - 4 + 1 = 4$$

となっています。

「どこまで掛けるか」が分かりにくいときは、 r 個の数を実際に並べて確認します。

nPr の計算手順

${}_nP_r$ を計算するときは、

1. n から始める。
2. 1 ずつ小さくする。
3. 数を r 個並べる。
4. すべて掛ける。

と進めます。

r まで掛けるわけではない

たとえば、

$${}_6P_3$$

は、

$$6 \cdot 5 \cdot 4$$

です。

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ではありません。

「3」は最後に掛ける数ではなく、掛ける数の個数を表しています。

樹形図との対応

枝の本数をまとめて計算している

異なる A, B, C から 2 文字を選んで順に並べるとします。

1 文字目を A にすると、2 文字目は B, C の 2 通りです。

同様に、1 文字目が B や C の場合にも、残り 2 文字から選びます。

1 文字目	2 文字目を選ぶ文字	枝先に対応する順列
A	B, C	AB, AC
B	A, C	BA, BC
C	A, B	CA, CB

枝先は、

$$AB, AC, BA, BC, CA, CB$$

の 6 個です。

一方、順列では、

$${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

と一度に計算できます。

つまり、順列の式は、樹形図で「最初は 3 本、その先はそれぞれ 2 本」と数えていることを短く表しています。

列挙・樹形図・順列は同じ数え上げ

小さい数なら列挙や樹形図で確かめられます。

順列の式は、その枝分かれを積の法則でまとめたものです。

迷ったときは、小さな例の樹形図へ戻ると意味を確認できます。

すべてを並べる場合**階乗**

1 から n までの自然数をすべて掛けたものを、 n の**階乗**といい、

$$n!$$

と表します。

つまり、

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

です。

 n 個すべてを並べると $n!$

異なる n 個をすべて一列に並べる場合は、 n 個から n 個を選んで並べることになります。

したがって、

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

です。

これは $n!$ なので、

$${}_nP_n = n!$$

となります。

たとえば異なる 4 個すべてを並べる場合は、

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

通りです。

全部を並べるなら階乗

異なる n 個をすべて並べる場合の数は、

$$n!$$

です。

一部の r 個だけを並べる場合は、

$${}_nP_r$$

を使います。

問題文から順列を判断する**順序を区別するかが判断の中心**

たとえば、異なる 5 冊の本から 3 冊を選び、「左・中央・右」の 3 か所に 1 冊ずつ置くとしします。

同じ 3 冊を選んでも、置く場所が変われば別の並べ方です。

したがって、これは 5 個から 3 個を選んで順に並べる順列で、

$${}_5P_3$$

を使います。

一方、この講では「順序を考えずに 3 冊だけを選ぶ」という数え方には進みません。順列では、**位置や順番が変われば別の場合になる**ことを必ず確認します。

順列の判断手順

1. もとのものがすべて異なるか確認する。
2. 何個を使うか確認する。
3. 並べる順序や位置を区別するか確認する。
4. 異なる n 個から r 個を順に並べるなら ${}_nP_r$ と考える。

例題

例題 1

異なる 5 色のカードから 3 枚を選び、左から右へ一列に並べます。
並べ方は何通りありますか。

例題 1 の解答・解説

5 枚から 3 枚を選んで順に並べるので、

$${}_5P_3$$

を求めます。

1 番目は 5 通り、2 番目は残り 4 通り、3 番目は残り 3 通りです。
したがって、

$${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

より、60 通りです。

例題 2

異なる 6 冊の本から 2 冊を選び、1 冊目、2 冊目の順に並べます。
並べ方は何通りありますか。

例題 2 の解答・解説

異なる 6 冊から 2 冊を選び、順序を区別して並べるので、

$${}_6P_2$$

です。

したがって、

$${}_6P_2 = 6 \cdot 5 = 30$$

より、30 通りです。

例題 3

異なる 5 個の置物をすべて一列に並べます。
並べ方は何通りありますか。

例題 3 の解答・解説

5 個すべてを並べるので、

$$5!$$

を求めます。
したがって、

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

より、120 通りです。

演習問題**練習問題 1**

${}_4P_2$ を計算しなさい。

練習問題 2

${}_7P_3$ を計算しなさい。

練習問題 3

${}_6P_4$ を計算しなさい。

練習問題 4

異なる 4 文字 A, B, C, D から 2 文字を選び、順に並べます。
並べ方は何通りありますか。
また、実際にすべて列挙して答えを確かめなさい。

練習問題 5

異なる 7 枚のカードから 3 枚を選び、「1 番目・2 番目・3 番目」の 3 か所に 1 枚ずつ置きます。
置き方は何通りありますか。

練習問題 6

異なる 6 個の旗から 4 個を選び、左から順に一列に並べます。
1 番目、2 番目、3 番目、4 番目で選べる旗の数を順に答え、その後、並べ方の総数を求めなさい。

練習問題 7

異なる 4 冊の本をすべて一列に並べます。
並べ方は何通りありますか。また、この場合を ${}_nP_r$ と階乗の両方で表しなさい。

練習問題 8

ある生徒は、

$${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

と計算しました。
この計算の誤りを説明し、正しく計算しなさい。

練習問題 9

異なる 5 枚のカード A, B, C, D, E から 3 枚を選んで一列に並べます。
ある生徒は、「 A, B, C を使う並べ方なら、 ABC と BAC は同じ 3 枚を使っているから同じ場合である」と考えました。
この考えが順列では正しくない理由を説明しなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

4 から始めて 2 個の数を掛けます。

$${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

したがって、答えは 12 です。

練習問題 2 の解答・解説

7 から始めて 3 個の数を掛けます。

$${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

したがって、答えは 210 です。

練習問題 3 の解答・解説

6 から始めて 4 個の数を掛けます。

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

したがって、答えは 360 です。

練習問題 4 の解答・解説

異なる 4 文字から 2 文字を選んで順に並べるので、

$${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

通りです。

列挙すると、

AB, AC, AD, BA, BC, BD

CA, CB, CD, DA, DB, DC

の 12 通りです。

計算と一致します。

練習問題 5 の解答・解説

1 番目は 7 通り、2 番目は残り 6 通り、3 番目は残り 5 通りです。

したがって、

$${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

より、210 通りです。

練習問題 6 の解答・解説

1 番目は 6 通りです。

1 個使うので、2 番目は 5 通りです。

さらに 1 個使うので、3 番目は 4 通り、4 番目は 3 通りです。

したがって、

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

より、360 通りです。

練習問題 7 の解答・解説

異なる 4 冊すべてを並べるので、

$${}_4P_4$$

と表せます。

また、すべてを並べる場合なので、

$${}_4P_4 = 4!$$

です。

したがって、

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

より、24 通りです。

練習問題 8 の解答・解説

${}_7P_3$ の「3」は、3 まで掛けるという意味ではありません。

7 から始めて、1 ずつ小さくした数を **3 個** 掛けます。

したがって、

$${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

順列では、選んだものだけでなく並べる順序も区別します。

ABC では左から A, B, C の順ですが、 BAC では左から B, A, C の順です。

同じ 3 枚を使っているにもかかわらず並ぶ順序が異なるので、 ABC と BAC は別の場合として数えます。