第 026 講 力がする仕事

この講でできるようになること

- 一定の力が物体にする仕事を、移動方向の力の成分と移動距離から求められる。
- 力と移動の向きから、仕事が正・負・零のどれになるかを説明できる。
- 固定した座標軸での符号付き変位や、複数の力・往復運動について、仕事を区別して計算できる。

同じ力でも、移動の向きによって仕事は変わる

床の上の箱を右へ動かす場面を考える。右向きに押す力は箱の移動と同じ向きに働くが、左向きの力は移動に逆らう。上向きに引く力も、箱が水平方向にしか動かないなら、その上向きの部分だけでは水平方向の移動に寄与しない。

物理では、力が物体の移動にどのように関わるかを表す量を**仕事**という。日常会話での「大変な作業」とは意味が異なる。まず物体を一つの点として扱い、まっすぐ移動する間、一つの力の大きさと向きが一定である場合を考える。

力がする仕事

移動した物体に一定の力が働くとき、その力がする仕事 W を次で定める。

$$W = F_{\parallel} s$$

ここで、s はその移動区間で進んだ距離（$s \geq 0$）、$F_{\parallel}$ は**移動方向を正**として測った力の成分である。$F_{\parallel}$ は移動と同じ向きなら正、逆向きなら負、直角なら零となる。

仕事の単位はジュール（記号 J）であり、$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ である。仕事は向きを持たないスカラーだが、その値には正・負・零がある。

箱が右へ 3 m 動くとき、右向き 6 N の力なら $F_{\parallel} = +6\,\mathrm{N}$、左向き 6 N の力なら $F_{\parallel} = -6\,\mathrm{N}$ である。どちらも力の大きさは 6 N だが、仕事の符号は反対になる。

移動方向に対する力の向き	$F_{\parallel}$ の符号	その力がする仕事
同じ向き	正	正の仕事
直角	零	零の仕事
逆向き	負	負の仕事

負の仕事は「仕事をしていない」という意味ではない。**移動に逆らう成分がある**ことを表す。一方、力が働いていても移動距離が 0 m なら $W = 0\,\mathrm{J}$ である。例えば荷物をその場で支え続ける人は疲れるが、静止した荷物に対して支える力がする力学的な仕事は零である。

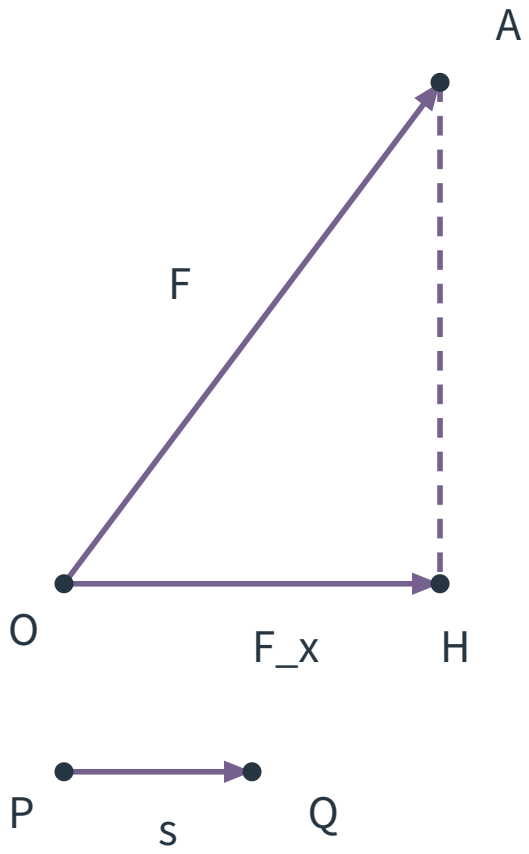
斜めの力は移動方向の成分で考える

斜め上へ引く力には、水平成分と鉛直成分がある。水平右向きに移動する物体については、右向き成分が正の仕事をし、左向き成分が負の仕事をする。上向き成分は水平移動と直角なので、その部分の仕事は零である。

次の二つの模式図では、OA が**ある一つの力**、OH がその水平成分、破線 AH が成分を読み取る補助線である。上段の力の図は「座標の 1 単位が 1 N」、下段の $P \to Q$ は**別の変位図**で「座標の 1 単位

が 1 m」とする。力と変位は異なる種類の量なので、両方の矢印の紙面上の長さを直接比較してはならない。P, Q は変位を説明するための点であり、別の力の作用点ではない。

右上向きの力

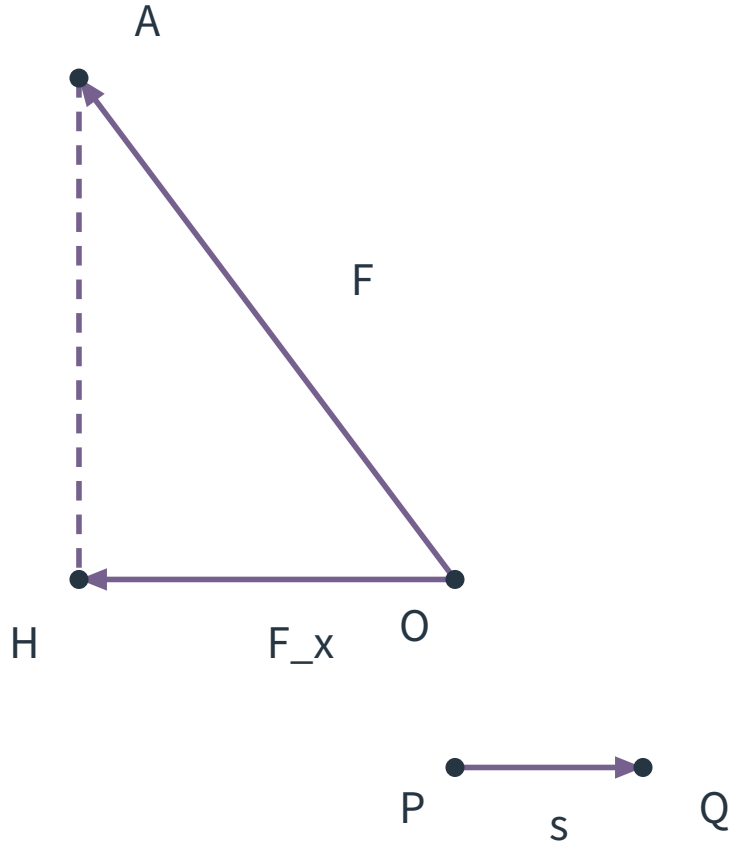


力の水平成分は $F_x = +6\,\mathrm{N}$、鉛直成分は $+8\,\mathrm{N}$ である。力の大きさは $\sqrt{(6\,\mathrm{N})^2 + (8\,\mathrm{N})^2} = 10\,\mathrm{N}$ だが、右へ 3 m 移動するときの仕事に使うのは水平成分である。

$$W = (+6\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = +18\,\mathrm{J}$$

力と右向きの変位がなす角は約 53.13° である。これは 60° ではない。

左上向きに反転した力



力の大きさ 10 N と上向き成分 +8 N は変わらない。しかし左右反転によって水平成分は $F_x = -6\,\mathrm{N}$ となり、右への 3 m の移動に対する仕事は次のようになる。

$$W = (-6\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = -18\,\mathrm{J}$$

この図で力と右向きの変位がなす角は約 126.87° であり、120° ではない。**力の大きさを変えず左右を反転すると、移動方向の成分だけが正から負へ変わる**ことが、仕事の符号を判断する鍵である。

力と変位のなす角から仕事を求める

移動距離を s、力の大きさを F（$F \geq 0$）とする。$F > 0$ かつ $s > 0$ のとき、力と**変位の向き**のなす角を θ（$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$）とおくと、移動方向の力の成分は $F_{\parallel} = F\cos\theta$ だから、仕事は次の式でも表せる。

$$W = Fs\cos\theta$$

ここで $\cos\theta$ は、力のうち変位方向にどれほどの割合が向くかを**符号付きで**示す。θ は必ずしも水平から測った角ではなく、**力と変位との間の角**である。

鈍角でもこの式を使える理由を、先ほどの左右反転から考える。右上向きの力と右向きの変位がなす鋭角を α とすると、力を左右反転した後の角は $\theta = 180^\circ - \alpha$ となる。力の大きさも鉛直成分も同じで、水平成分だけが正から負へ反転するため、

$$F\cos(180^\circ - \alpha) = -F\cos\alpha$$

となる。$F > 0$ なら両辺を F で割って、$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ を得る。したがって鈍角の余弦が負になるのは、左右反転した力の移動方向成分が負になることに対応している。

例えば $\alpha = 60^\circ$ の場合、$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ なので、$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ である。これは上の $(\pm 6, 8)\,\mathrm{N}$ の図とは**別の角度の数値例**である。

力と変位のなす角	移動方向成分	仕事の符号
0°	$+F$	正（同じ F, s なら最大）
$0^\circ < \theta < 90^\circ$	正	正
90°	$0\,\mathrm{N}$	零
$90^\circ < \theta < 180^\circ$	負	負
180°	$-F$	負（同じ F, s なら最小）

なお、$s = 0\,\mathrm{m}$ なら、どの向きの力であっても $W = 0\,\mathrm{J}$ である。また、力の大きさが $F = 0\,\mathrm{N}$ であっても仕事は零である。これらの場合は変位または力の向きが定まらないことがあるため、θ を定義する必要はない。

固定した座標軸では、変位にも符号がある

ここまでは、**その移動の向きを正**とし、距離 s を非負としていた。一方、右向きを正とする固定された x 軸を使う場合は、力の x 成分 F_x と変位 $\Delta x = x_\mathrm{f} - x_\mathrm{i}$（$x_\mathrm{i}$ は初めの位置、x_f は後の位置）がともに正にも負にもなる。

一定の力による一直線上の移動では、同じ仕事を次のように求められる。

$$W = F_x \Delta x$$

例えば、左向きに $2\,\mathrm{m}$ 移動したときは $\Delta x = -2\,\mathrm{m}$ である。力も左向きなら $F_x = -4\,\mathrm{N}$ なので、仕事は正になる。

$$W = (-4\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = +8\,\mathrm{J}$$

移動方向を正として書き直すなら、$F_\parallel = +4\,\mathrm{N}$、$s = 2\,\mathrm{m}$ であり、同じ $+8\,\mathrm{J}$ を得る。**非負の距離 s と符号付き変位 Δx を混ぜたり、負号をさらに一つ付けたりしてはならない**。

一つの力の仕事と、すべての力の仕事

複数の力が働くときは、**どの力がする仕事か**を区別する。同じ移動に対して各力の仕事を求め、それらを加えれば合力がする仕事になる。合力は個々の力を合わせたものであり、力の大きさを何でも足せばよいわけではない。

水平な床の上を右へ移動する箱には、引く力のほか、重力、床からの垂直抗力、摩擦力などが働き得る。重力と垂直抗力が鉛直方向であれば、箱が水平に動く間はこれらの力の仕事が零でも、**力そのものが零という意味ではない**。

仕事の対象と単位

床に対して滑る物体を、固定された床との摩擦が妨げる場合、その摩擦力は移動と逆向きで負の仕事をする。しかし「摩擦力の仕事は常に負」とは限らない。力の向きと対象物体の変位を一つずつ確認する必要がある。

仕事と力のモーメントは異なる物理量である。モーメントも力と長さの積で表されるが、モーメントの単位を仕事の単位 J と呼び換えない。

例題

1

水平右向きに 3 m 移動する箱に、大きさ 6 N の一定の力が働く。力が (1) 右向き、(2) 左向き、(3) 真上向きの場合、それぞれの力がする仕事を求めよ。

解説

右への移動を正とした力の成分を調べる。距離はどの場合も $s = 3\,\mathrm{m}$ である。

(1) $F_{\parallel} = +6\,\mathrm{N}$ より、$W = (+6\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = +18\,\mathrm{J}$ である。

(2) $F_{\parallel} = -6\,\mathrm{N}$ より、$W = (-6\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = -18\,\mathrm{J}$ である。

(3) 力が移動方向と直角なので、$F_{\parallel} = 0\,\mathrm{N}$ となり、$W = (0\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}$ である。力の大きさが同じでも、その移動方向成分で仕事が決まる。

2

箱が水平右向きに 4 m 移動する。大きさ 10 N の一定の力と右向きの変位のなす角が (1) 60°、(2) 120° の場合、それぞれの仕事を求めよ。ただし $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ とする。

解説

(1) 60° は鋭角なので移動方向成分は正である。

$$F_{\parallel} = (10\,\mathrm{N}) \times \frac{1}{2} = +5\,\mathrm{N}$$

$$W = (+5\,\mathrm{N}) \times (4\,\mathrm{m}) = +20\,\mathrm{J}$$

(2) $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ である。左右反転の関係から $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ と分かる。

$$F_{\parallel} = (10\,\mathrm{N}) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -5\,\mathrm{N}$$

$$W = (-5\,\mathrm{N}) \times (4\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{J}$$

力の大きさと移動距離が同じでも、鈍角では移動に逆らう成分があるため負の仕事になる。

3

右向きを正とする固定 x 軸上で、物体の変位が $\Delta x = -2\,\mathrm{m}$ であった。力の x 成分が (1) $-4\,\mathrm{N}$、(2) $+4\,\mathrm{N}$ の場合に、その一定の力がする仕事を求めよ。

解説

固定軸を使うため、$W = F_x \Delta x$ として符号付きの値をそのまま掛ける。

(1) $W = (-4\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = +8\,\mathrm{J}$。力と移動はともに左向きである。

(2) $W = (+4\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = -8\,\mathrm{J}$。力は右向きで移動は左向きである。

ここで $\Delta x = -2\,\mathrm{m}$ を使った後に「左向きだから」と負号を追加してはならない。

4

水平な床上の箱を、水平から上向きに 60° の角度で、大きさ $10\,\mathrm{N}$ の一定の力で引く。箱は水平右向きに $3\,\mathrm{m}$ 移動し、一定の摩擦力 $2\,\mathrm{N}$ が左向きに働く。重力は鉛直下向きに $20\,\mathrm{N}$、垂直抗力は鉛直上向きであり、鉛直方向の加速度は零とする。$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$、$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

(1) 引く力、摩擦力、重力、垂直抗力が箱にする仕事をそれぞれ求めよ。

(2) 垂直抗力の大きさを求めよ。

(3) 箱に働くすべての力の仕事の和を求めよ。

解説

(1) 引く力の水平右向き成分は $(10\,\mathrm{N}) \times \frac{1}{2} = 5\,\mathrm{N}$ なので、その仕事は $(+5\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = +15\,\mathrm{J}$ である。摩擦力の仕事は $(-2\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = -6\,\mathrm{J}$ となる。

重力と垂直抗力は水平変位に直角である。したがってそれぞれ $(0\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}$ の仕事をする。

(2) 垂直抗力の大きさを R とする。鉛直方向の加速度が零なので、上向きの引く力の成分、垂直抗力、重力はつり合う。上向きを正として、

$$R + (10\,\mathrm{N}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (20\,\mathrm{N}) = 0\,\mathrm{N}$$

$$R = \left(20 - 5\sqrt{3}\right)\,\mathrm{N}$$

となる。引く力に上向き成分があるため、垂直抗力は $20\,\mathrm{N}$ ではない。

(3) 各力の仕事を加えると、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{total}} &= (+15\,\mathrm{J}) + (-6\,\mathrm{J}) \\ &\quad + (0\,\mathrm{J}) + (0\,\mathrm{J}) \\ &= +9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。これは合力がする仕事にも等しい。

©ミライコーチング

演習問題

1

水平右向きに 5 m 動く物体に、それぞれ一定の力が働く。次の各力がする仕事と、その正負の理由を答えよ。

(1) 水平右向き 4 N。

(2) 水平左向き 4 N。

(3) 鉛直上向き 4 N。

2

一直線に 4 m 動く物体に、大きさ 10 N の一定の力が働く。力と変位のなす角が (1) 0°、(2) 90°、(3) 180° のとき、それぞれの仕事を求めよ。また、90° の場合に「力が働いていない」と考えてよいか、理由とともに答えよ。

3

水平右向きを x 軸の正方向とし、物体が右へ 2 m 動く。大きさ 10 N の一定の力の成分は、次の二通りである。

(1) 水平成分 $+8$ N、鉛直成分 $+6$ N。

(2) 水平成分 -8 N、鉛直成分 $+6$ N。

それぞれについて、水平成分の符号に注目して力がする仕事を求めよ。また、同じ大きさの力で仕事の符号が変わる理由を説明せよ。

4

右向きを正とする固定 x 軸上で、物体が $x = +3$ m の位置から $x = +1$ m の位置まで移動した。その間、一定の力の x 成分が -7 N の場合と $+7$ N の場合について、次に答えよ。

(1) 物体の変位 Δx を求めよ。

(2) それぞれの力がする仕事を、$W = F_x \Delta x$ を用いて求めよ。

(3) (2)のうち力が左向きの場合について、移動方向を正とする $W = F_{\parallel} s$ でも同じ結果を確かめよ。

©ミライコーチング

5

水平な床上の箱が右へ 2 m 移動する間、右向き 8 N の一定の力、左向き 3 N の一定の動摩擦力、下向きの重力、上向きの垂直抗力が働く。鉛直方向には移動しない。

(1) 右向きの力と動摩擦力がそれぞれする仕事を求めよ。

(2) 重力と垂直抗力がそれぞれする仕事を求め、その理由を説明せよ。

(3) すべての力の仕事の和を求めよ。

6

重力の大きさが 12 N の荷物を、鉛直上向きに一定の速さで 2 m 持ち上げる。持ち上げる力は一定で鉛直上向きとする。その後、同じ荷物が鉛直下向きに 2 m 移動する。

(1) 持ち上げる間に、重力と持ち上げる力がする仕事をそれぞれ求めよ。また、その二つの仕事の和を求めよ。

(2) 下がる間に重力がする仕事を求めよ。

7

水平な固定床の上を物体が右へ 2 m 動き、続けて左へ 2 m 動いて出発点に戻った。右向きを正とする。この往復運動は外部からの操作で与えられたものとし、以下では指定した右向きの力と動摩擦力の仕事だけを調べる。

物体には、往復の全区間を通して**一定の右向き 5 N の力**が働く。また、床との動摩擦力は各区間で大きさ 2 N であり、物体の運動と逆向きに働くものとする。

(1) 右向き 5 N の力が、往路・復路・往復全体でする仕事をそれぞれ求めよ。

(2) 動摩擦力が、往路・復路・往復全体でする仕事をそれぞれ求めよ。

(3) 往復全体の変位が 0 m であることだけから、動摩擦力の仕事の合計を 0 J としてよいか。理由を説明せよ。

8

次の文の正誤を判断し、誤りであれば正しい考え方を説明せよ。

(1) 大きさが 10 N の力で荷物を支え、荷物が動かなかった。人は疲れるので、その力が荷物にする力学的な仕事は正である。

(2) 水平に動く箱に重力が働いているが、重力のする仕事が 0 J になることがある。

(3) 力の向きと変位の向きがなす角が鈍角なら、F と s がともに正であっても仕事は負になる。

演習問題の解答・解説

1

右向きへの移動距離は $s = 5\,\mathrm{m}$ であり、各力の右向き成分を求める。

(1) $F_{\parallel} = +4\,\mathrm{N}$ なので、$W = (+4\,\mathrm{N}) \times (5\,\mathrm{m}) = +20\,\mathrm{J}$。移動と同じ向きの力である。

(2) $F_{\parallel} = -4\,\mathrm{N}$ なので、$W = (-4\,\mathrm{N}) \times (5\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{J}$。移動に逆らう向きの力である。

(3) $F_{\parallel} = 0\,\mathrm{N}$ なので、$W = (0\,\mathrm{N}) \times (5\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}$。力は鉛直方向であり、水平移動に直角である。

2

仕事は $W = Fs\cos\theta$ で求める。$F = 10\,\mathrm{N}$、$s = 4\,\mathrm{m}$ である。

(1) $\cos 0^\circ = 1$ より、$W = (10\,\mathrm{N}) \times (4\,\mathrm{m}) \times 1 = +40\,\mathrm{J}$。

(2) $\cos 90^\circ = 0$ より、$W = (10\,\mathrm{N}) \times (4\,\mathrm{m}) \times 0 = 0\,\mathrm{J}$。

(3) $\cos 180^\circ = -1$ より、$W = (10\,\mathrm{N}) \times (4\,\mathrm{m}) \times (-1) = -40\,\mathrm{J}$。

(2)でも $10\,\mathrm{N}$ の力は実際に働いている。ただし変位方向の成分が $0\,\mathrm{N}$ なので、その力の仕事が零なのである。

3

右向きに移動するため、仕事に使うのは与えられた水平成分である。

(1) $W = (+8\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = +16\,\mathrm{J}$。

(2) $W = (-8\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = -16\,\mathrm{J}$。

どちらも力の大きさは $10\,\mathrm{N}$ で、上向き成分は $+6\,\mathrm{N}$ である。しかし左右反転によって水平成分が $+8\,\mathrm{N}$ から $-8\,\mathrm{N}$ になるため、仕事の符号が反転する。

4

(1) 終点位置から始点位置を引く。

$$\Delta x = (+1\,\mathrm{m}) - (+3\,\mathrm{m}) = -2\,\mathrm{m}$$

(2) 固定軸での符号をそのまま掛ける。力が左向きなら $W = (-7\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = +14\,\mathrm{J}$、右向きなら $W = (+7\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = -14\,\mathrm{J}$ である。

(3) 実際の移動は左向きなので、その向きを正に取り直すと $F_{\parallel} = +7\,\mathrm{N}$、$s = 2\,\mathrm{m}$ となる。したがって $W = (+7\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = +14\,\mathrm{J}$ であり、(2)と一致する。

©ミライコーチング

5

(1) 移動方向は右向きである。右向き 8 N の力の仕事は $(+8\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = +16\,\mathrm{J}$、左向き 3 N の摩擦力の仕事は $(-3\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = -6\,\mathrm{J}$ である。

(2) 鉛直方向に変位がないため、重力・垂直抗力の移動方向成分はいずれも 0 N である。したがって、それぞれの仕事は 0 J となる。仕事が零でも力が存在しないわけではない。

(3) 全力の仕事を加えると、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{total}} &= (+16\,\mathrm{J}) + (-6\,\mathrm{J}) \\ &\quad + (0\,\mathrm{J}) + (0\,\mathrm{J}) \\ &= +10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

6

(1) 荷物は鉛直上向きに一定の速さで動くので、鉛直方向の力がつり合い、持ち上げる力の大きさは 12 N である。上向きの移動距離は 2 m だから、

$$W_{\mathrm{g}} = (-12\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = -24\,\mathrm{J}$$

$$W_{\mathrm{lift}} = (+12\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = +24\,\mathrm{J}$$

となる。二つの仕事の和は $(-24\,\mathrm{J}) + (+24\,\mathrm{J}) = 0\,\mathrm{J}$ である。

(2) 荷物が下向きに移動するとき、重力も下向きなので、$W_{\mathrm{g}} = (+12\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = +24\,\mathrm{J}$ となる。

7

往路は $\Delta x = +2\,\mathrm{m}$、復路は $\Delta x = -2\,\mathrm{m}$ である。区間ごとの力の向きを分けて考える。

(1) 右向き 5 N の力は全区間で向きが一定なので、固定軸での仕事は次のようになる。

$$W_{\mathrm{out}} = (+5\,\mathrm{N}) \times (+2\,\mathrm{m}) = +10\,\mathrm{J}$$

$$W_{\mathrm{back}} = (+5\,\mathrm{N}) \times (-2\,\mathrm{m}) = -10\,\mathrm{J}$$

$$W_{\mathrm{total}} = (+10\,\mathrm{J}) + (-10\,\mathrm{J}) = 0\,\mathrm{J}$$

全区間で力が一定なので、全変位 $\Delta x_{\mathrm{total}} = 0\,\mathrm{m}$ を使い、$(+5\,\mathrm{N}) \times (0\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}$ としてもよい。

(2) 摩擦力は往路では左向き、復路では右向きになる。各区間で**移動方向と逆向き**なので、移動方向成分は両方とも $-2\,\mathrm{N}$ である。

$$W_{\mathrm{f,out}} = (-2\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = -4\,\mathrm{J}$$

$$W_{\mathrm{f,back}} = (-2\,\mathrm{N}) \times (2\,\mathrm{m}) = -4\,\mathrm{J}$$

$$W_{\mathrm{f,total}} = (-4\,\mathrm{J}) + (-4\,\mathrm{J}) = -8\,\mathrm{J}$$

(3) よくない。摩擦力は折返しで向きを変えるため、全区間で同じ一定の力として $F_x \Delta x_{\mathrm{total}}$ を使うことはできない。全変位が零でも、各区間で摩擦が負の仕事をしている。

8

(1) **誤り**。荷物の移動距離は $s = 0\,\mathrm{m}$ なので、支える力が荷物にする仕事は $W = 0\,\mathrm{J}$ である。人が疲れることと、荷物への力学的な仕事は別である。

(2) **正しい**。重力が鉛直下向きでも、箱が水平に動くなら変位との角は 90° であり、重力の移動方向成分は $0\,\mathrm{N}$ である。

(3) **正しい**。鈍角では力の移動方向成分が負になる。$F > 0$、$s > 0$ の場合でも $\cos\theta < 0$ なので、$W = Fs\cos\theta < 0$ となる。