第 265 講 行列で情報や関係を表す

学習目標

- 表と行列の対応を読み取り、行番号・列番号を用いて成分の意味を説明できる。
- 二つの集合の関係を 0 と 1 の行列で表し、行列から関係を復元できる。
- グラフの頂点順を明示して隣接行列を作り、向きの有無による違いを説明できる。

1. 表を長方形に並べたものが行列である

架空の店「青空文具」の 3 日間の商品別販売数を考える。

日＼商品	ノート	ペン	定規
月	12	18	5
火	15	11	7
水	9	16	6

行を月、火、水の順、列をノート、ペン、定規の順に固定すると、数の部分は

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 5 \\ 15 & 11 & 7 \\ 9 & 16 & 6 \end{pmatrix}$$

と表せる。このように数を長方形に並べたものを**行列**という。横の並びを**行**、縦の並びを**列**という。A は 3 行 3 列の行列である。
行列 A の第 i 行・第 j 列の数を (i, j) 成分、または a_{ij} と書く。例えば

$$a_{23} = 7$$

であり、これは第 2 行の火曜日、第 3 列の定規の販売数が 7 本であることを表す。添字は必ず「行、列」の順で読む。数だけを見ても意味は決まらず、行と列の順序を一緒に記録する必要がある。

例題 1：表と行列を対応させる

上の行列 A について答えよ。
(1) a_{12} の値と、その意味を答えよ。
(2) 水曜日の販売数を表す行を書け。
(3) 定規の販売数を表す列を上から順に書け。

例題 1 の解答・解説

(1) $a_{12} = 18$ である。第 1 行は月曜日、第 2 列はペンなので、月曜日に売れたペンが 18 本であることを表す。
(2) 第 3 行であり、$(9, 16, 6)$ である。
(3) 第 3 列であり、上から $5, 7, 6$ である。

2. 「関係がある」を 0 と 1 で表す

生徒の集合を $S = \{P, Q, R\}$、講座の集合を $C = \{\text{英語}, \text{数学}, \text{情報}, \text{美術}\}$ とする。受講している関係を、行は P, Q, R、列は英語、数学、情報、美術の順として表す。受講していれば 1、していなければ 0 と定める。

生徒＼講座	英語	数学	情報	美術
P	1	1	0	0
Q	0	1	1	0
R	1	0	1	1

この関係を表す行列は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。例えば $b_{23} = 1$ は Q が情報を受講していること、$b_{14} = 0$ は P が美術を受講していないことを表す。0 と 1 には大小の意味ではなく、「関係なし」「関係あり」という意味を持たせている。

例題 2：0-1 行列を読む

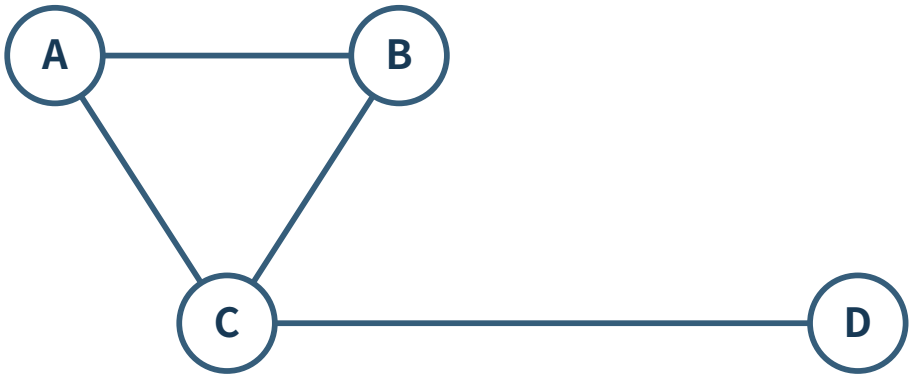
行列 B について答えよ。
(1) R が受講している講座をすべて答えよ。
(2) 数学を受講している生徒をすべて答えよ。
(3) b_{32} の値と意味を答えよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 第 3 行の 1 の位置を見ると、英語、情報、美術である。
(2) 第 2 列の 1 の位置を見ると、P と Q である。
(3) $b_{32} = 0$ である。第 3 行は R、第 2 列は数学なので、R が数学を受講していないことを表す。

3. グラフを隣接行列で表す

頂点 A, B, C, D をこの順に並べる。向きのない辺が AB, AC, BC, CD であるグラフを考える。



行を「出発側の頂点」、列を「到着側の頂点」と考え、二頂点が辺で結ばれていれば 1、結ばれていなければ 0 とする。このグラフの**隣接行列**は

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。例えば $m_{14} = 0$ は辺 AD がないこと、$m_{43} = 1$ は辺 CD があることを表す。ここでは自分自身を結ぶ辺を考えないので、左上から右下へ並ぶ $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}$ はすべて 0 である。
向きのない辺 AB は A から B にも B から A にも隣接すると読むので、$m_{12} = m_{21} = 1$ である。同様に全成分で $m_{ij} = m_{ji}$ が成り立ち、左上から右下の対角線をはさんで同じ値が並ぶ。

例題 3：無向グラフと隣接行列

上のグラフと行列 M について答えよ。
(1) 頂点 C に隣接する頂点をすべて答えよ。
(2) 第 4 行が $(0, 0, 1, 0)$ である理由を説明せよ。
(3) 行列中の 1 の個数を求め、辺の本数との関係を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

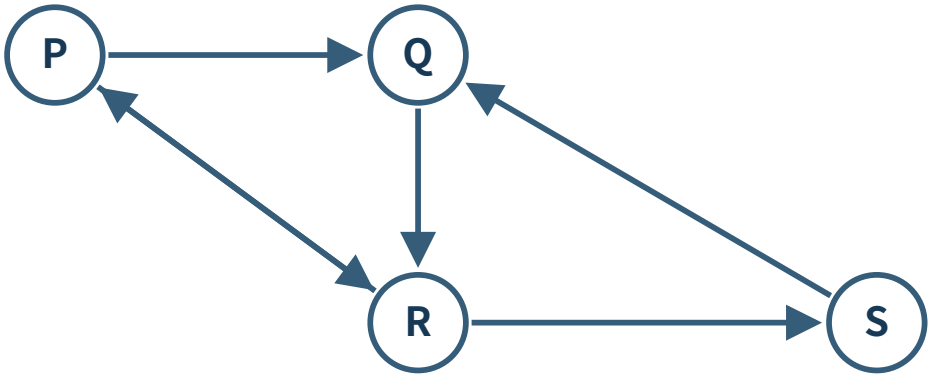
(1) 第 3 行の 1 の位置、または図から、A、B、D である。
(2) 第 4 行は D から見た隣接関係である。D は C だけと結ばれているので、列 A、B、C、D の順に $0, 0, 1, 0$ となる。
(3) 1 は 8 個である。各辺について両向きの位置 (i, j) と (j, i) に 1 が一つずつ現れるため、1 の個数は辺 4 本の 2 倍である。

4. 有向グラフでは順序が向きを表す

頂点順を P, Q, R, S とし、有向辺を

$$P \to Q, \quad P \to R, \quad Q \to R, \quad R \to P, \quad R \to S, \quad S \to Q$$

とする。



行を矢印の出発点、列を矢印の到着点と定めると、隣接行列は

$$N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

である。$n_{12}=1$ は $P\to Q$ があることを表す。一方、$n_{21}=0$ なので $Q\to P$ はない。有向グラフでは一般に n_{ij} と n_{ji} は等しくない。
行列の第 i 行に並ぶ 1 は、頂点 i から出る矢印を表す。第 j 列に並ぶ 1 は、頂点 j へ入る矢印を表す。例えば第 3 行 $(1,0,0,1)$ から R を出る矢印は $R\to P$ と $R\to S$、第 2 列 $(1,0,0,1)$ から Q へ入る矢印は $P\to Q$ と $S\to Q$ である。

例題 4：有向グラフの行と列を読む

行列 N について答えよ。
(1) P から出る矢印の行き先をすべて答えよ。
(2) Q へ入る矢印の出発点をすべて答えよ。
(3) n_{34} と n_{43} の値を答え、それぞれが表す矢印の有無を説明せよ。

例題 4 の解答・解説

(1) N の第 1 行の 1 の位置から、Q と R である。
(2) N の第 2 列の 1 の位置から、P と S である。
(3) $n_{34}=1$ なので $R\to S$ がある。$n_{43}=0$ なので $S\to R$ はない。行は出発点、列は到着点であるから、二つの成分は逆向きの関係を表す。

行列で関係を表す手順

1. 行に対応する対象と、その順序を決める。
2. 列に対応する対象と、その順序を決める。
3. 各成分に入れる数の意味を明記する。
4. (i,j) 成分を「第 i 行の対象から第 j 列の対象への関係」と読む。
5. グラフでは向きの有無と、自分自身への辺を含むかを確認する。

演習問題

問題 1：成分の位置と意味

行を工場 X、Y、列を製品 A、B、C の順とした生産個数の行列を

$$C=\begin{pmatrix}24&18&30\\21&25&16\end{pmatrix}$$

とする。(1) c_{23} の値と意味を答えよ。(2) 工場 X の製品 B の生産個数を、成分記号と値で答えよ。

問題 2：関係から行列を作る

生徒を U、V、W の順、委員会を図書、放送、園芸の順とする。U は図書と園芸、V は放送、W は図書と放送に所属している。所属を 1、非所属を 0 として 3 行 3 列の行列を作れ。

問題 3：無向グラフを読む

頂点順を A、B、C、D として、隣接行列が

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である向きのない単純グラフについて、辺をすべて答えよ。また、1 の個数と辺の本数を答えよ。

問題 4：頂点順の重要性

問題 3 と同じグラフを、頂点順 C、A、D、B で表すときの隣接行列を作れ。行と列はともにこの順とする。

問題 5：有向グラフを行列にする

頂点順を A、B、C として、有向辺が $A \to B$、$B \to A$、$B \to C$、$C \to C$ である。行を出発点、列を到着点とする隣接行列を作れ。対角成分が 1 となる箇所の意味も説明せよ。

問題 6：行と列から関係を読む

問題 5 で作った行列を E とする。(1) B から出る矢印の行き先をすべて答えよ。(2) B へ入る矢印の出発点をすべて答えよ。(3) e_{23} と e_{32} の値と意味を答えよ。

解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) $c_{23} = 16$ であり、工場 Y が製品 C を 16 個生産したことを表す。
(2) 第 1 行・第 2 列なので $c_{12} = 18$ である。

問題 2 の解答・解説

行と列の順を指定どおりにすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。例えば第 3 行は W の所属を表し、図書と放送が 1、園芸が 0 である。

©ミライコーチング

問題 3 の解答・解説

1 の位置から、辺は AB、AD、BC、CD である。同じ辺を AB と BA のように重ねて数えない。1 は 8 個、辺は 4 本である。向きのない各辺が対称な二つの成分に現れる。

問題 4 の解答・解説

新しい順序は C、A、D、B である。C は D、B と、A は D、B と、D は C、A と、B は C、A と隣接するので

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。グラフ自体は同じでも、頂点順を変えると成分の位置が変わる。

問題 5 の解答・解説

行・列を A、B、C の順とすると

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。$e_{33} = 1$ は、自分自身へ向かう有向辺 $C \to C$ があることを表す。

問題 6 の解答・解説

(1) 第 2 行 $(1, 0, 1)$ の 1 の位置から、A と C である。
(2) 第 2 列 $(1, 0, 0)$ の 1 の位置から、A である。
(3) $e_{23} = 1$ は $B \to C$ があることを表す。$e_{32} = 0$ は $C \to B$ がないことを表す。

©ミライコーチング