第 011 講 落下と鉛直投射を同じ法則で見る

この講でできるようになること

- 自由落下・鉛直投げ上げ・鉛直投げ下ろしを、初速度の違いと共通の重力加速度によって説明できる。
- 鉛直上向きを正として、位置・速度・加速度の式を使い、最高点や地面への到達を求めることができる。
- 速度と速さ、変位と移動距離を区別し、計算結果が実際の運動のどの場面を表すか判断できる。

1. 上に投げても、下に投げても、加速度は同じ

手を離したボールは落下する。一方、上に投げたボールはしばらく上昇し、やがて向きを変えて落下する。下に投げたボールは、初めから下向きに運動する。

この 3 つの運動は、見た目には異なる。しかし、空気抵抗を無視できる場合、いずれも**鉛直下向きに同じ加速度をもつ運動**として扱える。

違いを生んでいるのは、主に運動を始めた瞬間の速度、すなわち初速度である。

鉛直方向の座標を決める

これから扱う運動では、すべて次の約束を使う。

- 地面を位置の原点とし、$x = 0$ とする。
- 鉛直上向きを正方向、下向きを負方向とする。
- 物体の鉛直位置を x、鉛直方向の速度を v、加速度を a とする。
- 運動を調べ始める時刻を t_0、そのときの位置を x_0、初速度を v_0 とする。
- 時刻 t までの経過時間を $\tau = t - t_0$ とする。したがって、$\tau \geq 0$ である。

位置 x の単位は m、速度 v の単位は m/s、加速度 a の単位は $\mathrm{m/s^2}$ とする。

この講では、数値を代入して計算する際、位置 x, x_0 は m、速度 v, v_0 は m/s、加速度 a と重力加速度の大きさ g は $\mathrm{m/s^2}$、時刻 t, t_0 と経過時間 τ は s で測った数値を用いる表記とする。これは物理量の関係式そのものから単位を消してよいという意味ではない。計算結果を物理量として示すときは、必ず単位を付ける。後に現れる $v^2 = 25$ なども同じ数値計算の表記であり、速度の二乗という物理量の単位は $\mathrm{m^2/s^2}$ である。

例えば、地面から 20 m の高さで物体を放せば、初期位置は $x_0 = 20\,\mathrm{m}$ である。

時刻が $t_0 = 5\,\mathrm{s}$ のときに運動を調べ始め、時刻が $t = 7\,\mathrm{s}$ になった場合、経過時間は $\tau = 2\,\mathrm{s}$ となる。時刻そのものと経過時間は区別する必要がある。

重力加速度の符号

地表付近では、空気抵抗を無視すると、物体は鉛直下向きにほぼ一定の加速度をもつ。この加速度を重力加速度という。

重力加速度の**大きさ**を g とする。g は正の値であり、代表的な値は

$$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

である。計算を簡単にするために、問題によっては $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ と指定することもある。

©ミライコーチング

今回は鉛直上向きを正としているため、重力加速度の符号付きの値は

$$a = -g$$

となる。

例えば $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ なら、速度は $1\,\mathrm{s}$ ごとに $10\,\mathrm{m/s}$ ずつ負の方向へ変化する。

これは「必ず速さが増える」という意味ではない。上向きに進んでいる物体では速さが減り、下向きに進んでいる物体では速さが増える。

自由落下と鉛直投射

鉛直上向きを正としたとき、初速度によって運動を次のように区別する。

運動	運動を始めるときの状態	初速度	加速度
自由落下	物体を静かに放す	$v_0 = 0$	$a = -g$
鉛直投げ上げ	物体を上向きに投げる	$v_0 > 0$	$a = -g$
鉛直投げ下ろし	物体を下向きに投げる	$v_0 < 0$	$a = -g$

ここでいう自由落下は、初速度を与えずに静かに放す場合を指す。3 つの運動はいずれも、空気抵抗を無視し、重力加速度を一定とする条件で考える。

次の模式図では、F が自由落下、U が鉛直投げ上げ、D が鉛直投げ下ろしを表す。3 つの物体は同じ高さから運動を始めるものとし、鉛直上向きを正とする。

図の縦方向は実際の鉛直方向に対応し、描画用の横方向は場面を並べるためだけに使っている。地面を表す下端の線が $x = 0$ である。

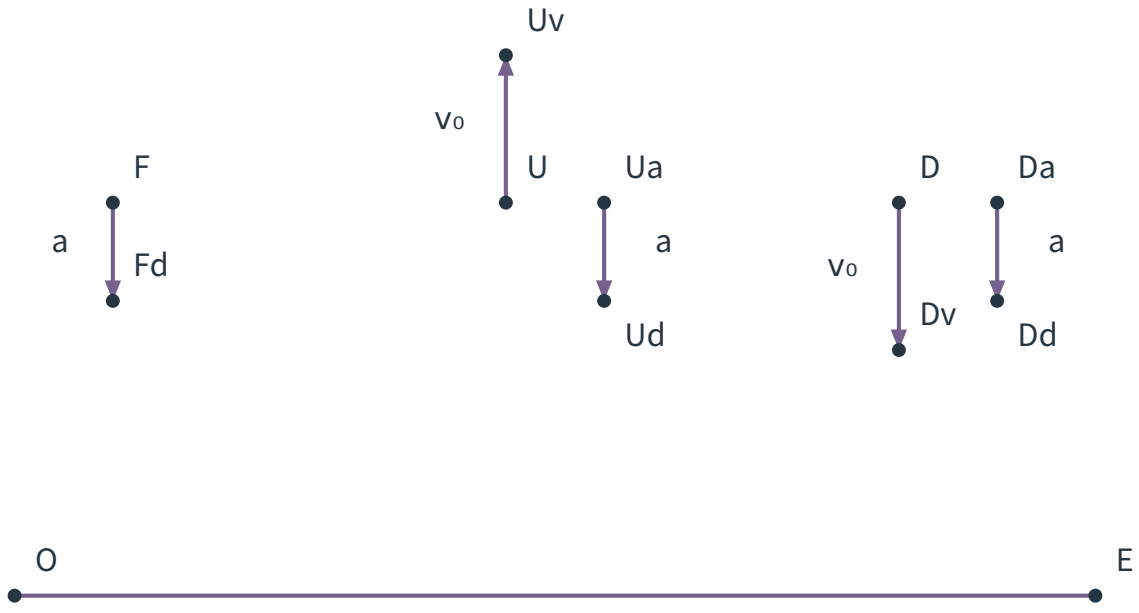

図 1　自由落下 F、鉛直投げ上げ U、鉛直投げ下ろし D の初期状態の模式図。a は加速度、v_0 は初速度を示す。

自由落下では $v_0 = 0$ であるため、初速度の矢印を描いていない。U と D では初速度の向きが反対であるが、加速度はどちらも下向きである。

加速度と速度は単位が異なるため、図中の 2 種類の矢印の長さを直接比較して大きさを判断してはならない。また、初速度の矢印と加速度の矢印は運動の向きを説明するために描いたものであり、異なる場面の物体が横方向に移動することを意味しない。

向きの約束を途中で変えない

鉛直投げ下ろしで初速度が負になっても、加速度を $+g$ に変えてはならない。

鉛直上向きを正と決めた以上、自由落下・投げ上げ・投げ下ろしのすべてで $a = -g$ を使う。運動の違いは、初速度 v_0 の符号と値で表す。

2. 等加速度運動の式から、鉛直運動の式をつくる

空気抵抗を無視し、地表付近で重力加速度が一定であるとすると、鉛直方向の運動は等加速度運動として扱える。

等加速度運動では、初速度 v_0、初期位置 x_0、加速度 a、経過時間 τ を用いて

$$v = v_0 + a\tau$$

$$x = x_0 + v_0\tau + \frac{1}{2}a\tau^2$$

と表せる。

今回の加速度は $a = -g$ である。したがって、2 つの式に代入すると

$$v = v_0 - g\tau$$

$$x = x_0 + v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

を得る。

最初の式は、経過時間とともに速度がどのように変わるかを表す。2 番目の式は、その時刻に物体がどの位置にいるかを表す。

ここで g は正の大きさであり、式の負号が加速度の向きを表している。

また、等加速度運動では時間を含まない関係

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

も成り立つ。これに $a = -g$ を代入すれば

$$v^2 - v_0^2 = -2g(x - x_0)$$

となる。

この式は、経過時間が分からなくても、位置の変化と速度の大きさを関係づけたいときに役立つ。ただし、速度が二乗されているため、速度の正負をこの式だけで決めることはできない。

©ミライコーチング

式を使える範囲

これらの式は、空気抵抗を無視し、重力加速度を一定とみなせる範囲で成り立つ。

地面に衝突するまでを考える問題では、計算式を使う範囲も地面に到達する時刻までとする。衝突後に物体が止まるか、跳ね返るかなどは、この式だけでは決められない。

3. 自由落下は、初速度が 0 の等加速度運動

ある高さから物体を静かに放すと、最初の速度は 0 である。しかし、放した後も速度が 0 のままなのではない。

加速度が下向きなので、物体は時間とともに下向きの速度をもつようになる。

初速度 $v_0 = 0$ を先ほどの式に代入すると、

$$v = -g\tau$$

$$x = x_0 - \frac{1}{2}g\tau^2$$

となる。

例えば $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ なら、放してから $1\,\mathrm{s}$ 後には $v = -10\,\mathrm{m/s}$、$2\,\mathrm{s}$ 後には $v = -20\,\mathrm{m/s}$ となる。ただし、それらの時刻までに地面へ衝突していないことが条件である。

速度の負号は下向きであることを示す。速さは速度の大きさなので、それぞれ $10\,\mathrm{m/s}$、$20\,\mathrm{m/s}$ である。

例題 1

地面から $20\,\mathrm{m}$ の高さにある小球を静かに放した。放した時刻を $t_0 = 0$ とし、鉛直上向きを正とする。

空気抵抗を無視し、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。地面に到達するまでの運動について、次の問いに答えよ。

(1) 放してから $1.0\,\mathrm{s}$ 後の位置と速度を求めよ。

(2) 放してから何秒後に地面へ到達するか求めよ。

(3) 地面に到達する直前の速度と速さを求めよ。

解答・解説

初期条件は $x_0 = 20\,\mathrm{m}$、$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ である。$t_0 = 0$ なので、経過時間は $\tau = t$ となる。

(1) 自由落下の式より、

$$x = 20 - \frac{1}{2} \times 10 \times 1.0^2 = 15\,\mathrm{m}$$

$$v = -10 \times 1.0 = -10\,\mathrm{m/s}$$

となる。したがって、位置は地面から $15\,\mathrm{m}$、速度は下向きに $10\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 地面に到達したときは $x = 0$ であるから、

$$0 = 20 - 5\tau^2$$

$$\tau^2 = 4$$

となる。数学的には $\tau = 2, -2$ が得られるが、経過時間は $\tau \geq 0$ である。

したがって、到達までの経過時間は $2.0\,\mathrm{s}$ である。

(3) $\tau = 2.0\,\mathrm{s}$ を速度の式に代入すると、

$$v = -10 \times 2.0 = -20\,\mathrm{m/s}$$

となる。速度は $-20\,\mathrm{m/s}$、速さは $20\,\mathrm{m/s}$ である。

このモデルで対象とする運動区間は $0 \leq \tau \leq 2.0\,\mathrm{s}$ である。それより後の時刻に同じ落下の式を延長することはしない。

4. 鉛直投げ上げの最高点では何が起こるか

今度は物体を鉛直上向きに投げる。初速度 v_0 は正であるが、加速度は変わらず $-g$ である。

したがって、上昇中は速度が正のまま少しずつ小さくなり、やがて 0 になる。その後、速度は負になり、物体は下向きに運動する。

重要なのは、上昇から下降へ切り替わる瞬間の考え方である。

最高点で速度は 0、加速度は 0 ではない

鉛直投げ上げでは、物体が到達する最も高い位置を最高点という。

最高点に達する瞬間には、上向きの速度がなくなり、下向きの速度に切り替わる。この瞬間の速度は

$$v = 0$$

である。

しかし、**最高点でも重力加速度は下向きのまま存在する**。したがって、

$$a = -g$$

が成り立つ。

速度が一瞬 0 になることと、加速度が 0 になることは別である。物体は最高点に静止し続けるのではなく、その後、下向きに動き始める。

最高点に達するまでの時間

鉛直上向きに $v_0 > 0$ で投げ、障害物に衝突することなく最高点へ達するとする。

最高点では $v = 0$ なので、

$$0 = v_0 - g\tau$$

より、最高点までの経過時間は

$$\tau_{\mathrm{top}} = \frac{v_0}{g}$$

となる。

$g>0$ であるため、この時間は初速度 v_0 が大きいほど長い。ただし、重力加速度が同じという条件で比較している。

最高点までの上昇量

最高点までの上昇量は、初期位置から最高点までに鉛直上向きに移動した長さである。

最高点の位置を x_{top} とすると、時間を含まない式に $v=0$ を代入して

$$0-v_0^2=-2g\left(x_{\text{top}}-x_0\right)$$

となる。よって、

$$x_{\text{top}}-x_0=\frac{v_0^2}{2g}$$

である。

右辺は**初期位置からの上昇量**を表す。地面を $x=0$ としているため、最高点の地面からの高さは

$$x_{\text{top}}=x_0+\frac{v_0^2}{2g}$$

となる。

初期位置が地面より高ければ、上昇量と最高点の高さは同じではない。

上昇・最高点・下降で比べる

運動の場面	速度 v	加速度 a	速さの変化
上昇中	正	負	減少する
最高点の瞬間	0	負	瞬間的に 0
下降中	負	負	増加する

上昇中と下降中では、加速度が同じでも速さの変化が反対になる。

これは、加速度の符号だけで速さが増えるか減るかを決められないことを示している。速度と加速度の向きを組み合わせて判断する必要がある。

例題 2

地面から小球を鉛直上向きに $20\,\mathrm{m/s}$ で投げた。投げた時刻を $t_0=0$、地面を $x=0$、上向きを正とする。

空気抵抗を無視し、$g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 最高点に達するまでの時間を求めよ。

(2) 最高点の地面からの高さを求めよ。

(3) 投げた小球が再び地面に戻るまでの時間を求めよ。

(4) 地面に戻る直前の速度と速さを求めよ。

解答・解説

初期条件は $x_0=0\,\mathrm{m}$、$v_0=20\,\mathrm{m/s}$ である。

(1) 最高点では $v=0$ となるので、

$$0=20-10\tau$$

から

$$\tau=2.0\,\mathrm{s}$$

を得る。

(2) 最高点までの上昇量は

$$\frac{v_0^2}{2g}=\frac{20^2}{2\times 10}=20\,\mathrm{m}$$

である。地面から投げたので、最高点の高さも $20\,\mathrm{m}$ となる。

(3) 位置の式は

$$x=20\tau-5\tau^2$$

である。地面にあるときは $x=0$ だから、

$$0=20\tau-5\tau^2$$

$$0=5\tau(4-\tau)$$

より、$\tau=0,4$ が得られる。

$\tau=0$ は投げた瞬間を表す。したがって、投げた後に地面へ戻るのは $\tau=4.0\,\mathrm{s}$ である。

(4) 地面へ戻る直前の速度は、

$$v=20-10\times 4.0=-20\,\mathrm{m/s}$$

となる。

よって、速度は $-20\,\mathrm{m/s}$、速さは $20\,\mathrm{m/s}$ である。

投げた瞬間と地面に戻った瞬間では速度の大きさが等しいが、向きは反対である。この結果は、空気抵抗を無視したモデルのものである。

5. 位置・速度・加速度のグラフを対応させる

鉛直投げ上げでは、物体の位置、速度、加速度はそれぞれ異なる変化をする。3 つの量を同じ場面で考えると、運動の式の意味が分かりやすくなる。

例として、地面から $15\,\mathrm{m}$ の高さで物体を鉛直上向きに $10\,\mathrm{m/s}$ で投げた場合を考える。投げた時刻を $t_0=0$ とし、空気抵抗を無視して $g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

初期条件は

$$x_0=15\,\mathrm{m},\qquad v_0=10\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、経過時間 τ に対する位置・速度・加速度は

$$x = 15 + 10\tau - 5\tau^2$$

$$v = 10 - 10\tau$$

$$a = -10$$

となる。ここで x は m、v は m/s、a は $\mathrm{m/s^2}$、τ は s を単位とする。

位置–時間グラフ

位置を表す式には τ^2 の項があり、その係数は負である。そのため、位置–時間グラフは下向きに開く放物線になる。

最高点に達するのは、

$$0 = 10 - 10\tau$$

より、$\tau = 1\,\mathrm{s}$ のときである。このときの位置は

$$x = 15 + 10 - 5 = 20\,\mathrm{m}$$

となる。

初期位置からの上昇量は 5 m であり、地面からの最高点の高さは 20 m である。

地面に到達するときは $x = 0$ だから、

$$0 = 15 + 10\tau - 5\tau^2$$

$$0 = -5(\tau - 3)(\tau + 1)$$

となる。解は $\tau = 3, -1$ であるが、経過時間は負にならないため、到達時刻は $\tau = 3\,\mathrm{s}$ である。

したがって、グラフで表す運動の時間範囲は $0 \le \tau \le 3\,\mathrm{s}$ とする。

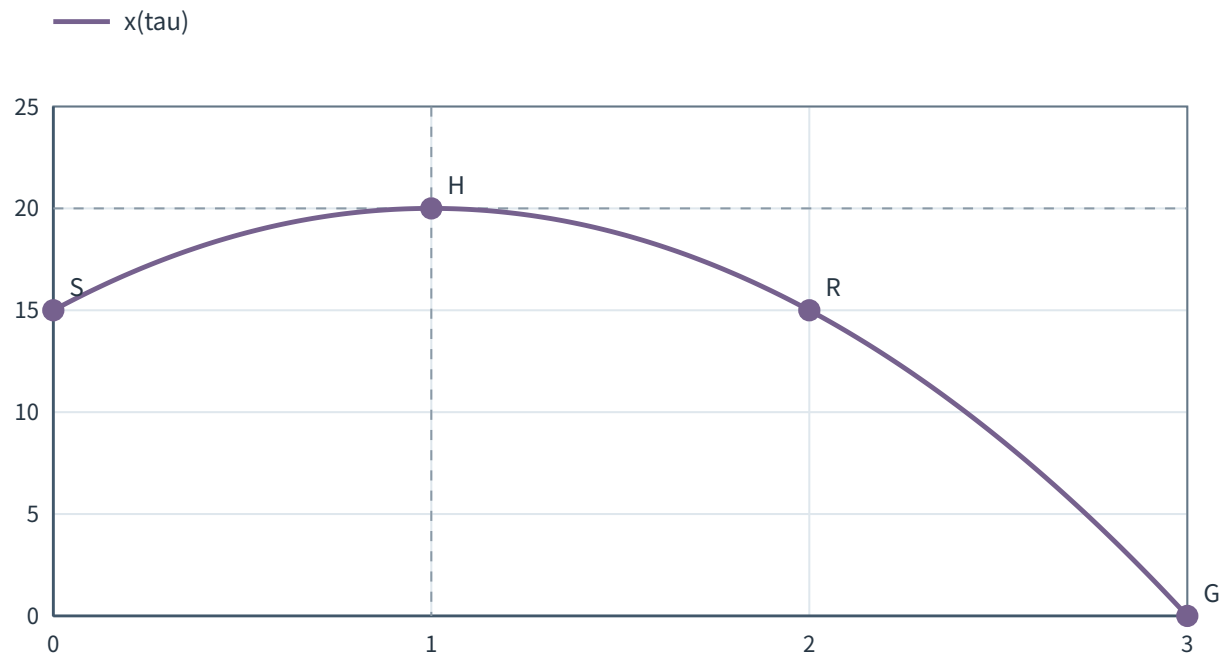

図 2　横軸は経過時間 τ（s）、縦軸は鉛直位置 x（m）。S は出発、H は最高点、R は初期の高さへの再通過、G は地面到達を表す。

この図の描画用の横座標は経過時間 τ、縦座標は物理的な位置 x に対応する。横方向が物体の水平方向の移動を意味するわけではない。

グラフは $\tau = 1\,\mathrm{s}$ で最高点を通り、その後は位置が減少する。また、$\tau = 2\,\mathrm{s}$ では出発時と同じ $15\,\mathrm{m}$ の高さを再び通過する。

同じ高さであっても、出発時は上昇中、再通過時は下降中であり、速度の向きは異なる。

速度–時間グラフ

速度は

$$v = 10 - 10\tau$$

である。

時間が $1\,\mathrm{s}$ 増えるごとに、速度は $10\,\mathrm{m/s}$ ずつ小さくなる。そのため、速度–時間グラフは右下がりの直線となる。

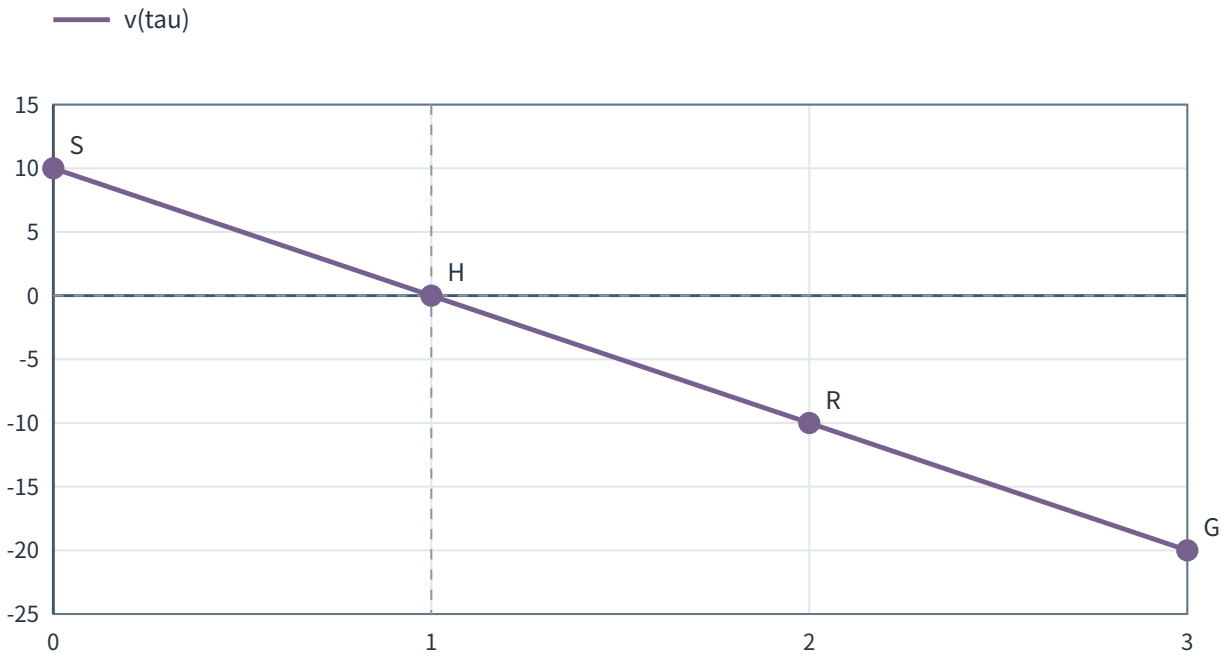

図 3　横軸は経過時間 τ（s）、縦軸は鉛直方向の速度 v（m/s）。速度は最高点で 0 となり、その後は負になる。

この図でも、描画用の横座標は τ、縦座標は v に対応する。

$\tau = 0$ では速度が $+10\,\mathrm{m/s}$ である。$\tau = 1\,\mathrm{s}$ で速度が 0 になり、その後は負の速度になる。

特に、$\tau = 2\,\mathrm{s}$ では速度が $-10\,\mathrm{m/s}$ となる。出発時と速さは同じ $10\,\mathrm{m/s}$ であるが、進行方向は反対である。

加速度–時間グラフ

加速度は、すべての時刻で

$$a = -10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。そのため、加速度–時間グラフは水平な直線となる。

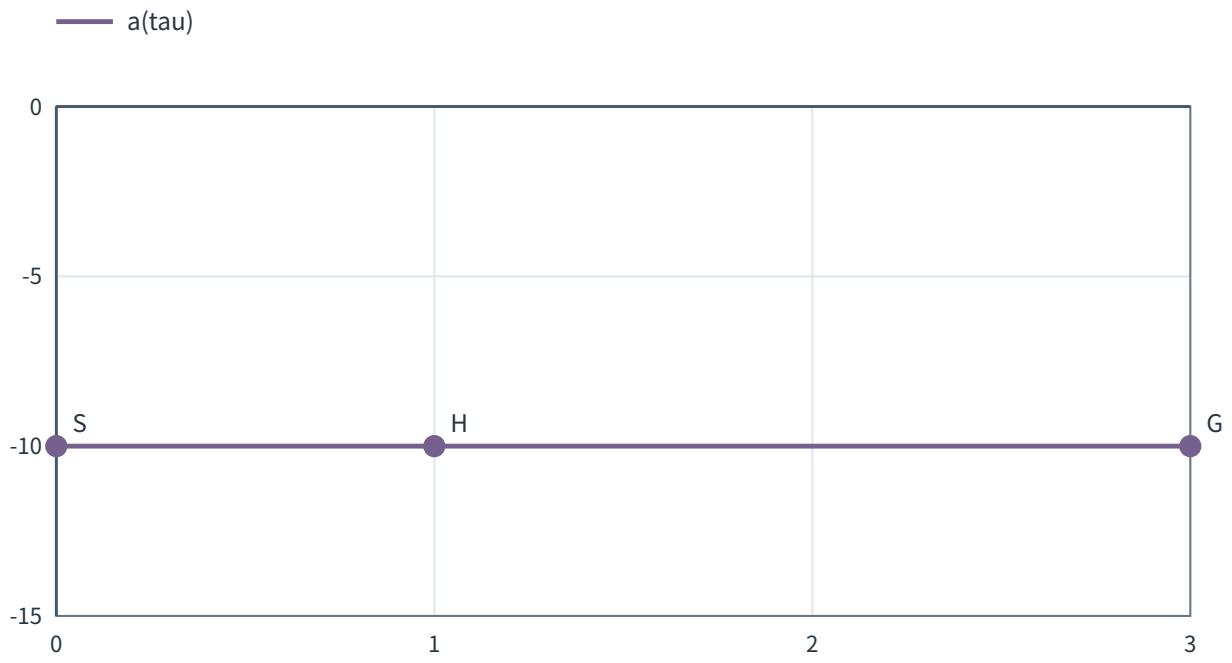

図 4　横軸は経過時間 τ（s）、縦軸は鉛直方向の加速度 a（m/s²）。最高点を含め、地面に到達する直前まで加速度は一定である。

この図の描画用の横座標は τ、縦座標は a に対応する。速度–時間グラフとは縦軸の物理量も単位も異なる。

最高点に対応する $\tau = 1\,\mathrm{s}$ でも、加速度は $-10\,\mathrm{m/s^2}$ のままである。速度が 0 となることは、加速度がなくなることを意味しない。

3 つのグラフの同じ経過時間を表で比べると、次のようになる。

経過時間 τ（s）	位置 x（m）	速度 v（m/s）	加速度 a（m/s²）	状態
0	15	+10	-10	投げた瞬間
1	20	0	-10	最高点
2	15	-10	-10	初期の高さを下降中
3	0	-20	-10	地面到達直前

位置–時間グラフでは最高点が山の頂点に、速度–時間グラフでは最高点が速度 0 の点に対応する。しかし、加速度–時間グラフにはその瞬間だけの特別な変化は現れない。

3 つのグラフをつなぐ見方

位置–時間グラフが曲線の場合、各時刻の接線の傾きがその瞬間の速度に対応する。上昇中は正、最高点では 0、下降中は負である。一方、2 つの時刻の点を結ぶ直線の傾きは、その時間区間の平均速度を表す。

速度–時間グラフの傾きは加速度と対応する。今回の運動では、速度–時間グラフの傾きは常に $-g$ となる。

同じ運動を表していても、各グラフの縦軸は異なる物理量である。単位を確かめながら読むことが重要である。

6. 地面に到達する時刻と、使う解の選び方

位置の式で $x=0$ とすると、地面にある時刻を求められる。しかし、方程式の解がすべて求める時刻になるとは限らない。

特に、二次方程式から 2 つの解が出る場合には、それぞれが何を表すかを確かめる必要がある。

経過時間は負にならない

先ほどの位置の式

$$x = 15 + 10\tau - 5\tau^2$$

で地面への到達を求めると、$\tau = 3, -1$ が得られた。

しかし、$\tau = t - t_0$ は運動を調べ始めてからの経過時間なので、$\tau < 0$ は対象外である。

したがって、$\tau = 3\,\mathrm{s}$ だけを地面への到達時刻として採用する。

$\tau = -1\,\mathrm{s}$ は数式を過去へ延長したときの解であり、今回指定した運動区間を表していない。

地面から投げる場合は、出発も地面にある

地面から上向きに投げた物体では、$x_0 = 0$ である。このとき、位置の式は

$$x = v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

となる。

地面にある条件 $x=0$ を使えば、

$$0 = \tau\left(v_0 - \frac{1}{2}g\tau\right)$$

より、

$$\tau = 0, \qquad \tau = \frac{2v_0}{g}$$

が得られる。

$v_0 > 0$ の場合、$\tau = 0$ は投げた瞬間、$\tau = 2\frac{v_0}{g}$ は上昇と下降を経て再び地面へ戻る瞬間を表す。

どちらも負でない解だが、同じ出来事を表しているわけではない。 問題が「投げた後に地面へ戻る時刻」を尋ねているなら、後の正の解を選ぶ。

式から得た時刻が、実際に使えるか

地面以外の高さを通過する時刻を求めた場合にも、次の条件を満たしているか確かめる。

- 運動を調べ始めた後の時刻であり、$\tau \geq 0$ であること。
- 地面への衝突など、今回の運動を終わらせる出来事より前であること。
- 問題で指定された「上昇中」「下降中」「初めて通過」などの条件と一致すること。

数式は、使う条件や時間範囲を外れても計算上の値を返すことがある。その値が今回の運動を表しているかは、別に判断する必要がある。

©ミライコーチング

7. 同じ高さを通るときの速度と、実際の移動距離

速度の二乗だけでは向きが分からない

時間を含まない式

$$v^2 - v_0^2 = -2g(x - x_0)$$

は便利であるが、速度の符号が消えることに注意する。

例えば、同じ高さへ戻った場合は $x = x_0$ なので、

$$v^2 = v_0^2$$

となる。

この式から分かるのは、速度の大きさが初速度の大きさと同じだということである。上昇中か下降中かは分からない。

運動が地面への衝突前であり、同じ高さを上昇中と下降中の 2 回通過するなら、上昇中の速度は正、下降中の速度は負となる。

速度の向きは、通過する時刻や運動の段階を使って確かめる。

変位と移動距離は同じではない

先ほどの $x_0 = 15\,\mathrm{m}$、$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ の運動を振り返る。

物体は地面から 15 m の位置で投げられ、最高点の 20 m まで上昇し、その後地面まで下降する。

したがって、最高点までの上昇量は

$$20 - 15 = 5\,\mathrm{m}$$

である。最高点から地面までの下降距離は 20 m となる。

出発から地面到達までの移動距離は

$$5 + 20 = 25\,\mathrm{m}$$

である。

一方、変位は終点位置から始点位置を引いた量だから、

$$\Delta x = 0 - 15 = -15\,\mathrm{m}$$

となる。

移動距離は経路に沿って実際に進んだ長さであり、負にはならない。変位は始点と終点の位置の差なので、今回のように下向きなら負となる。

また、変位の大きさは 15 m であり、移動距離の 25 m とは異なる。

©ミライコーチング

例題 3

地面から 30 m の高さにある小球を、鉛直下向きに 5.0 m/s の速さで投げた。投げた時刻を $t_0 = 0$ とし、鉛直上向きを正とする。

空気抵抗を無視し、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 初速度 v_0 と加速度 a を、符号を含めて答えよ。

(2) 地面へ到達するまでの時間を求めよ。

(3) 地面に到達する直前の速度と速さを求めよ。

(4) 投げてから地面に到達するまでの変位と移動距離を求めよ。

解答・解説

(1) 鉛直上向きが正なので、下向きの初速度は負となる。

$$v_0 = -5.0\,\mathrm{m/s}, \qquad a = -10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

(2) 初期位置は $x_0 = 30\,\mathrm{m}$ なので、位置の式は

$$x = 30 - 5\tau - 5\tau^2$$

となる。

地面に到達したときは $x = 0$ だから、

$$0 = 30 - 5\tau - 5\tau^2$$

$$0 = -5(\tau + 3)(\tau - 2)$$

より、$\tau = -3, 2$ が得られる。

経過時間が負の解は採用しないので、到達までの時間は 2.0 s である。

(3) 速度の式より、

$$v = -5 - 10 \times 2.0 = -25\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、速度は $-25\,\mathrm{m/s}$、速さは $25\,\mathrm{m/s}$ である。

(4) 変位は

$$\Delta x = 0 - 30 = -30\,\mathrm{m}$$

となる。

この運動では投げた瞬間から地面到達まで下向きに進み、途中で折り返さない。したがって、移動距離は 30 m である。

投げ下ろしでも、加速度を正にする必要はない。初速度と加速度がともに負になることで、下向きの速さが増す運動を表せる。

8. 空気抵抗を無視するモデルと、現実の落下

ここまでの運動では、空気抵抗を無視している。

しかし、実際に紙と金属球を落とすと、同じ高さから静かに放しても、落下の様子が大きく異なることがある。

空気中を進む物体には、運動を妨げる向きに空気抵抗が働くことがある。物体の形や大きさ、動き方などによって、その影響は異なる。

したがって、空気抵抗の影響が無視できない場合には、加速度を常に $-g$ とするモデルが実際の運動を正確に表すとは限らない。

一方、空気抵抗の影響が十分小さい物体を比較する場合や、空気抵抗を除いた理想的な運動を調べたい場合には、これまでの式が有効な近似やモデルとなる。

物理では、現実をそのまま複雑な式にするのではなく、何を無視し、何を一定とみなすかを決めて考える。そのため、計算を始める前に仮定を確認することが重要である。

演習問題

以下の問題では、特に断らない限り、地面を $x=0$、鉛直上向きを正とし、空気抵抗を無視する。また、地表付近で重力加速度を一定とする。求める位置と速度は地面への到達までを対象とする。

演習 1

地面から $12\,\mathrm{m}$ の高さにある小球について、次の 3 つの運動を考える。運動を始める時刻はいずれも $t_0=0$ であり、$g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

- A：小球を静かに放す。
- B：小球を鉛直上向きに $6.0\,\mathrm{m/s}$ で投げる。
- C：小球を鉛直下向きに $4.0\,\mathrm{m/s}$ の速さで投げる。

(1) A〜C を、自由落下・鉛直投げ上げ・鉛直投げ下ろしに分類せよ。

(2) A〜C それぞれの初速度 v_0 と加速度 a を、符号を含めて答えよ。

(3) A〜C それぞれについて、運動を始めてから $1.0\,\mathrm{s}$ 後の速度を求めよ。また、そのときの速さも答えよ。

演習 2

地面から $45\,\mathrm{m}$ の高さにある小球を静かに放した。放した時刻を $t_0=0$ とし、$g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 放してから $2.0\,\mathrm{s}$ 後の位置と速度を求めよ。

(2) 地面へ到達するまでの時間を求めよ。

(3) 地面に到達する直前の速度と速さを求めよ。

(4) 放してから地面到達までの変位と移動距離を求めよ。

©ミライコーチング

演習 3

地面から小球を鉛直上向きに 15 m/s で投げた。投げた時刻を $t_0 = 0$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 最高点に達するまでの時間を求めよ。

(2) 最高点の地面からの高さを求めよ。

(3) 投げた小球が再び地面に戻るまでの時間を求めよ。

(4) 地面に戻る直前の速度と速さを求めよ。

(5) 投げた瞬間から地面に戻るまでの変位と移動距離を求めよ。

©ミライコーチング

演習 4

地面から 40 m の高さにある小球を、鉛直上向きに 10 m/s で投げた。投げた時刻を $t_0 = 0$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

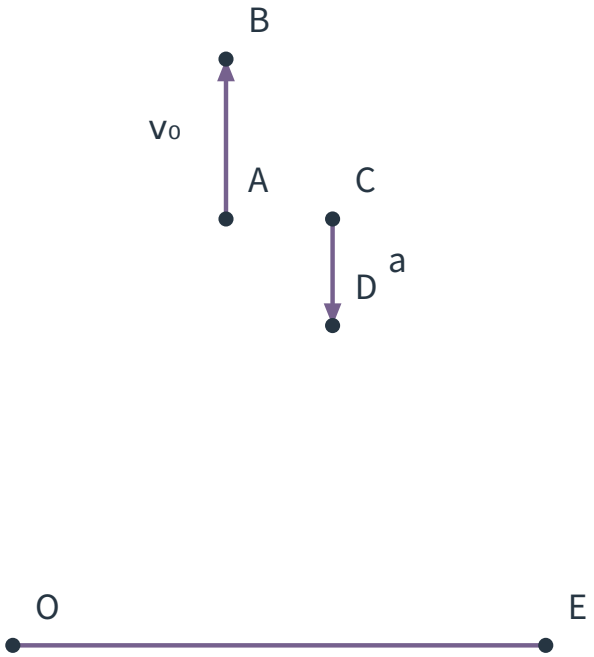

図 5　小球の初期状態を表す模式図。地面は x=0、放出位置は x_0=40 m、上向きが正。矢印は向きを示し、長さは物理量の大きさを表さない。

(1) 最高点に達するまでの時間を求めよ。

(2) 最高点の地面からの高さを求めよ。

(3) 地面に到達するまでの時間を求めよ。方程式から 2 つの解が得られる場合は、それぞれの採否を説明せよ。

(4) 地面に到達する直前の速度と速さを求めよ。

(5) 投げた瞬間から地面到達までの変位と移動距離を求めよ。

©ミライコーチング

演習 5

地面から小球を鉛直上向きに $10\,\mathrm{m/s}$ で投げた。投げた時刻を $t_0 = 0$ とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 投げてから地面に戻るまでの位置を、経過時間 τ の式で表せ。

(2) 地面から $3.75\,\mathrm{m}$ の高さを通過する時刻をすべて求めよ。

(3) (2)のそれぞれの時刻における速度と速さを求め、上昇中と下降中を区別せよ。

(4) この高さで時間を含まない式を使うと、速度の二乗からどのような値が求まるか示せ。また、その式だけでは速度の向きを決められない理由を説明せよ。

演習 6

地面から $20\,\mathrm{m}$ の高さにある小球を、時計の表示が $t_0 = 5.0\,\mathrm{s}$ のときに静かに放した。鉛直上向きを正とし、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 時計の表示が $t = 6.0\,\mathrm{s}$ のとき、運動開始からの経過時間 τ を求めよ。

(2) (1)の時刻における小球の位置と速度を求めよ。

(3) 小球が地面へ到達するときの経過時間と、時計の表示時刻をそれぞれ求めよ。

演習 7

鉛直上向きを正とし、空気抵抗を無視した鉛直投げ上げを考える。地表付近の重力加速度の大きさを $g > 0$ とする。

次の記述について、正しいものは「正しい」、誤っているものは「誤り」と答え、理由を説明せよ。

(1) 最高点では物体の速度が 0 であるため、加速度も 0 となる。

(2) 下降中に速度が $-12\,\mathrm{m/s}$ なら、速さは $12\,\mathrm{m/s}$ である。

(3) 同じ高さを上昇中と下降中に通る場合、時間を含まない式から求めた v^2 の値だけで、それぞれの進行方向を決められる。

(4) 地面から上向きに投げた物体の位置を表す式で $x = 0$ としたとき、得られる $\tau = 0$ は地面から出発する瞬間を表す。

(5) 空気抵抗の影響が大きい物体であっても、重力加速度の大きさが一定なら、加速度を必ず $a = -g$ として実際の運動を正確に表せる。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

解答 1

(1) それぞれの分類は次のとおりである。

- A：自由落下
- B：鉛直投げ上げ
- C：鉛直投げ下ろし

(2) 初速度は運動を始める向きによって符号が決まる。一方、加速度は 3 つとも重力による下向きの加速度である。

運動	初速度 v_0（m/s）	加速度 a（m/s²）
A	0	-10
B	+6.0	-10
C	-4.0	-10

(3) 速度の式 $v = v_0 - g\tau$ を使う。

A では、

$$v = 0 - 10 \times 1.0 = -10\,\mathrm{m/s}$$

となる。したがって、速さは $10\,\mathrm{m/s}$ である。

B では、

$$v = 6.0 - 10 \times 1.0 = -4.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。したがって、速さは $4.0\,\mathrm{m/s}$ である。

C では、

$$v = -4.0 - 10 \times 1.0 = -14\,\mathrm{m/s}$$

となる。したがって、速さは $14\,\mathrm{m/s}$ である。

各場合の $1.0\,\mathrm{s}$ 後の位置は、A で $7.0\,\mathrm{m}$、B で $13\,\mathrm{m}$、C で $3.0\,\mathrm{m}$ となる。いずれも地面に達していないので、この時刻に運動の式を使ってよい。

B は上向きに投げたが、$1.0\,\mathrm{s}$ 後にはすでに下降している。初速度の符号が正であっても、その後の速度まで正であり続けるとは限らない。

解答 2

初期条件は $x_0 = 45\,\mathrm{m}$、$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ である。

(1) 位置の式は

$$x = 45 - 5\tau^2$$

となる。$\tau = 2.0\,\mathrm{s}$ を代入すると、

$$x = 45 - 5 \times 2.0^2 = 25\,\mathrm{m}$$

である。

速度は

$$v = -10 \times 2.0 = -20\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、位置は $25\,\mathrm{m}$、速度は $-20\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 地面到達時には $x = 0$ なので、

$$0 = 45 - 5\tau^2$$

$$\tau^2 = 9$$

より、$\tau = 3, -3$ を得る。

経過時間が負の解は採用しないため、地面に到達するまでの時間は $3.0\,\mathrm{s}$ である。

(3) 地面到達直前の速度は

$$v = -10 \times 3.0 = -30\,\mathrm{m/s}$$

となる。したがって、速度は $-30\,\mathrm{m/s}$、速さは $30\,\mathrm{m/s}$ である。

(4) 変位は

$$\Delta x = 0 - 45 = -45\,\mathrm{m}$$

となる。

途中で向きを変えずに落下するため、移動距離は $45\,\mathrm{m}$ である。

変位の負号は下向きに位置が変わったことを示すのであり、移動距離が負になることを意味しない。

解答 3

初期条件は $x_0 = 0\,\mathrm{m}$、$v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$ である。

(1) 速度の式は

$$v = 15 - 10\tau$$

である。最高点では $v = 0$ なので、

$$0 = 15 - 10\tau$$

より、

$$\tau = 1.5\,\mathrm{s}$$

となる。

(2) 最高点までの上昇量は

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{15^2}{2 \times 10} = 11.25\,\mathrm{m}$$

である。

地面から投げたので、最高点の高さも $11.25\,\mathrm{m}$ となる。

(3) 位置の式は

$$x = 15\tau - 5\tau^2$$

である。地面に戻ったときは $x = 0$ だから、

$$0 = 15\tau - 5\tau^2$$

$$0 = 5\tau(3 - \tau)$$

より、$\tau = 0, 3$ が得られる。

$\tau = 0$ は投げた瞬間なので、地面に戻るまでの時間は $3.0\,\mathrm{s}$ である。

(4) 地面に戻る直前の速度は、

$$v = 15 - 10 \times 3.0 = -15\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、速度は $-15\,\mathrm{m/s}$、速さは $15\,\mathrm{m/s}$ である。

(5) 出発点も終点も地面なので、変位は

$$\Delta x = 0 - 0 = 0\,\mathrm{m}$$

である。

一方、移動距離は最高点までの上昇量と、最高点から地面までの下降距離の和となる。

$$11.25 + 11.25 = 22.5\,\mathrm{m}$$

したがって、変位は $0\,\mathrm{m}$、移動距離は $22.5\,\mathrm{m}$ である。

変位が 0 であっても、途中で運動していなかったわけではない。

解答 4

初期条件は

$$x_0 = 40\,\mathrm{m}, \qquad v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$$

である。

(1) 速度の式は

$$v = 10 - 10\tau$$

となる。最高点では $v = 0$ だから、

$$0 = 10 - 10\tau$$

より、最高点までの時間は $1.0\,\mathrm{s}$ である。

(2) 最高点までの上昇量は

$$\frac{10^2}{2\times 10}=5.0\,\mathrm{m}$$

である。

初期位置は地面から 40 m なので、最高点の高さは

$$40+5.0=45\,\mathrm{m}$$

となる。

上昇量の 5.0 m と最高点の高さ 45 m を混同してはならない。

(3) 位置の式は

$$x=40+10\tau-5\tau^2$$

となる。地面に到達する条件 $x=0$ を使えば、

$$0=40+10\tau-5\tau^2$$

$$0=-5(\tau-4)(\tau+2)$$

より、$\tau=4,-2$ が得られる。

$\tau=-2$ は運動開始前の経過時間に相当するため、採用しない。

したがって、地面への到達は投げてから 4.0 s 後である。

(4) 地面に到達する直前の速度は

$$v=10-10\times 4.0=-30\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、速度は -30 m/s、速さは 30 m/s である。

(5) 変位は

$$\Delta x=0-40=-40\,\mathrm{m}$$

となる。

移動距離は上昇した距離と下降した距離に分ける。初めに 40 m から 45 m まで上昇し、その後 45 m から地面まで下降するので、

$$5.0+45=50\,\mathrm{m}$$

となる。

したがって、変位は -40 m、移動距離は 50 m である。

単純に最初の高さ 40 m を移動距離とすると、投げ上げによって生じた上昇部分を見落としてしまう。

解答 5

初期条件は $x_0=0\,\mathrm{m}$、$v_0=10\,\mathrm{m/s}$、$g=10\,\mathrm{m/s^2}$ である。

(1) 位置の式に代入すると、

$$x = 10\tau - 5\tau^2$$

となる。

この物体は $\tau = 2\,\mathrm{s}$ に地面へ戻るので、対象とする運動の時間範囲は $0 \leq \tau \leq 2\,\mathrm{s}$ である。

(2) 地面から $3.75\,\mathrm{m}$ の高さを通るときは、

$$3.75 = 10\tau - 5\tau^2$$

となる。整理すると、

$$5\tau^2 - 10\tau + 3.75 = 0$$

である。

両辺を 5 で割り、平方の形にすると、

$$\tau^2 - 2\tau + 0.75 = 0$$

$$(\tau - 1)^2 = 0.25$$

となる。したがって、

$$\tau = 0.5, \qquad 1.5$$

を得る。

どちらの時刻も地面到達前の運動区間に入っている。よって、地面から $3.75\,\mathrm{m}$ の高さを通過するのは、投げてから $0.5\,\mathrm{s}$ 後と $1.5\,\mathrm{s}$ 後の 2 回である。

(3) 速度の式は

$$v = 10 - 10\tau$$

である。

$\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ のとき、

$$v = 10 - 10 \times 0.5 = +5.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。速度が正なので上昇中であり、速さは $5.0\,\mathrm{m/s}$ である。

$\tau = 1.5\,\mathrm{s}$ のとき、

$$v = 10 - 10 \times 1.5 = -5.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。速度が負なので下降中であり、速さは $5.0\,\mathrm{m/s}$ である。

(4) 時間を含まない式

$$v^2 - v_0^2 = -2g(x - x_0)$$

に値を代入すると、

$$v^2 - 100 = -2 \times 10 \times 3.75$$

$$v^2 = 25$$

となる。

したがって、速度の候補は

$$v = +5.0\,\mathrm{m/s}, \qquad v = -5.0\,\mathrm{m/s}$$

である。

v^2 は正負どちらの速度についても同じ値になるため、二乗式だけでは向きを区別できない。

上昇中か下降中かを判断するには、通過する時刻や、その時刻における速度の式を確認する必要がある。

解答 6

運動を調べ始める時刻は $t_0 = 5.0\,\mathrm{s}$、初期位置は $x_0 = 20\,\mathrm{m}$、初速度は $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ である。

(1) 経過時間は $\tau = t - t_0$ なので、

$$\tau = 6.0 - 5.0 = 1.0\,\mathrm{s}$$

となる。

(2) 位置は

$$x = 20 - 5\tau^2$$

である。$\tau = 1.0\,\mathrm{s}$ を代入すると、

$$x = 20 - 5 \times 1.0^2 = 15\,\mathrm{m}$$

となる。

速度は

$$v = -10 \times 1.0 = -10\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、時計が $6.0\,\mathrm{s}$ を示すとき、位置は $15\,\mathrm{m}$、速度は $-10\,\mathrm{m/s}$ である。

(3) 地面に到達する条件は $x = 0$ なので、

$$0 = 20 - 5\tau^2$$

$$\tau^2 = 4$$

より、$\tau = \pm 2$ が得られる。

経過時間が負の解は採用せず、

$$\tau = 2.0\,\mathrm{s}$$

となる。

時計の表示時刻は

$$t = t_0 + \tau = 5.0 + 2.0 = 7.0\,\mathrm{s}$$

である。

したがって、地面へ到達するまでの経過時間は 2.0 s、時計の表示時刻は 7.0 s である。

時刻 t にそのまま経過時間の値を代入してはならない。運動開始時刻が 0 でない場合には、必ず $\tau = t - t_0$ を使う。

解答 7

(1) **誤り**。

最高点で 0 となるのは速度 v である。加速度は重力によって鉛直下向きに生じているため、

$$a = -g$$

のままである。

物体は最高点で一瞬だけ速度 0 になるが、その状態にとどまるわけではない。下向きの加速度があるため、その後は下向きに速度をもつようになる。

(2) **正しい**。

速度の負号は進行方向が下向きであることを示す。速さは速度の大きさなので、

$$|\,v\,| = |\,-12\,| = 12\,\mathrm{m/s}$$

となる。

速さを $-12\,\mathrm{m/s}$ と表すことはない。

(3) **誤り**。

時間を含まない式では速度が二乗されているため、v^2 から速度の正負は一意に決まらない。

同じ高さを上昇中と下降中に通過する場合、速度の大きさが同じでも、上昇中の速度は正、下降中の速度は負となる。

進行方向を判断するには、時刻や運動の段階を確認する必要がある。

(4) **正しい**。

地面から投げる場合は初期位置が $x_0 = 0$ なので、投げた瞬間の $\tau = 0$ にも物体は地面の位置にある。

そのため、地面への帰着時刻を求める二次方程式に $\tau = 0$ が含まれていても不自然ではない。

ただし、「投げた後に戻る時刻」を求める場合には、$\tau = 0$ ではなく、その後の正の解を採用する。

(5) **誤り**。

実際の物体には、重力以外に空気抵抗の影響が生じることがある。その影響を無視できない場合、加速度が常に $-g$ になるとは限らない。

今回の式は、空気抵抗を無視し、地表付近で重力加速度を一定とみなすモデルに基づく。

重力加速度の大きさ g が一定であることと、空気抵抗を受けている物体の実際の加速度が常に $-g$ であることは同じではない。