

第 146 講 階差数列

学習目標

- ・ 階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ の意味を理解する。
- ・ 初項と階差から元の数列の一般項を求める。
- ・ 求めた一般項が初項と隣接項の差を満たすか確認する。

階差数列の考え方

この講では、 n は正整数とし、数列の各項は実数であるとする。

数列 a_n の隣り合う項の変化に注目すると、数列がどのように増減していくかを調べることができる。

数列 a_n に対して、階差数列 b_n を次のように定める。

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

ここで、階差数列の n 番目は「第 n 項から第 $n+1$ 項へ進む変化量」を表す。 $a_n - a_{n-1}$ は、 $n \geq 2$ のときには $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$ であり、階差数列の n 番目ではない。

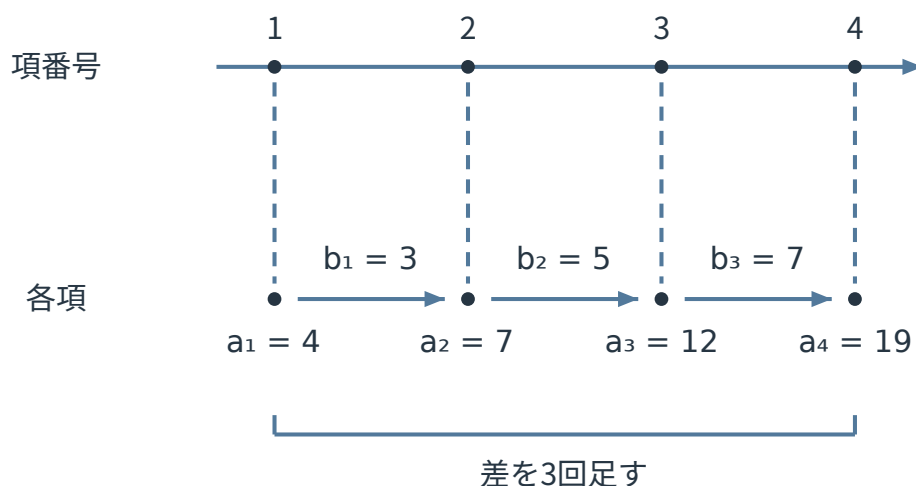


図 1 上段は項番号、下段は各項の対応であり、値の大小を距離で表さない。初項 4、階差 $b_n = 2n + 1$ と定めた数列である。最初の差は $b_1 = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ で、 a_1 から a_4 までは差を 3 回足す。

この図は、初項 $a_1 = 4$ 、全ての正整数 n に対して $b_n = 2n + 1$ と定めた数列の最初の 4 項 $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 12, a_4 = 19$ を示す。途中の差は 3, 5, 7 であり、 a_1 から a_4 へは 3 回の変化を重ねて進んでいる。

階差数列は、元の数列そのものではなく「次の項へ進むための変化量」を並べた数列である。

階差数列の定義

数列 a_n の階差数列を b_n とすると、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ である。

したがって、隣接する項の関係は $a_{n+1} = a_n + b_n$ と表せる。

初項と階差から一般項を求める関係式

階差数列が分かると、各項へ進むための変化量が分かる。 $n \geq 2$ のとき、 a_1 から a_n へ進む移動回数は $n - 1$ 回である。

まず、隣接する差を足し合わせる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$$

この式では、途中の項が相殺される。

$n \geq 3$ のとき、 $2 \leq j \leq n - 1$ の各 a_j は、 $k = j - 1$ の項から $+a_j$ 、 $k = j$ の項から $-a_j$ として現れるため、互いに打ち消し合う。

一方、 $n = 2$ のときは

$$\sum_{k=1}^1 (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1$$

であり、1つの差だけを考えるため中間項は存在しない。

したがって、階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を用いると、 $n \geq 2$ では

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

となる。

$n = 1$ のときは移動回数が 0 回であり、和を考える必要はない。初項そのものを確認して

$$a_1 = a_1$$

とする。

この関係は、階差が負や 0 の場合でも成立する。ただし、階差だけでは数列全体の位置は決まらない。初項が異なると、同じ変化を持つ別の数列になるため、一般項を求めるには初項と階差の両方が必要である。

階差数列を使うときの注意

- 本講の b_n は $a_{n+1} - a_n$ であり、 $n \geq 2$ で $a_n - a_{n-1}$ は b_{n-1} になる。
- 階差だけから元の数列を 1 つに決められると考えない。
- 求めた一般項は、 $n = 1$ の初項と、すべての n に対する $a_{n+1} - a_n$ の両方を確認する。
- 有限個の項だけから、その後の数列の規則が一意に決まるとは限らない。

階差の具体例

初項 $a_1 = 4$ 、全ての正整数 n に対して

$b_n = 2n + 1$ である数列を考える。

階差は $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = 7$ であるから、 $a_2 = 4 + 3 = 7$

$$a_3 = 7 + 5 = 12$$

$$a_4 = 12 + 7 = 19 \text{ となる。}$$

したがって、最初の 4 項は $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 12$, $a_4 = 19$ である。

この 4 項だけを見て、続きの規則が必ず 1 つに決まるわけではない。ここでは、階差 $b_n = 2n + 1$ が全ての正整数 n で定められていることを前提としている。

例題 1

数列

$$a_n = n^2 + 3n$$

の階差数列 b_n を求めよ。**例題 1 の解答**階差数列は $b_n = a_{n+1} - a_n$ で求める。

$$\begin{aligned} b_n &= ((n+1)^2 + 3(n+1)) - (n^2 + 3n) \\ &= (n^2 + 2n + 1 + 3n + 3) - (n^2 + 3n) \\ &= 2n + 4 \end{aligned}$$

したがって、階差数列は $b_n = 2n + 4$ である。確認すると、 $a_2 - a_1 = (4 + 6) - (1 + 3) = 6$ また、 $b_1 = 2 + 4 = 6$

で一致する。

例題 2数列 a_n が $a_1 = 5, \quad b_n = 3n - 1$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

例題 2 の解答

$n \geq 2$ では、初項と階差の和を考える。

$$\begin{aligned}a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 1) \\&= 5 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\&= 5 + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1)\end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}a_n &= 5 + \frac{3n(n-1)}{2} - n + 1 \\&= \frac{3n^2 - 5n + 12}{2}\end{aligned}$$

となる。

$n = 1$ のとき、

$$\frac{3 - 5 + 12}{2} = 5$$

であり、初項にも一致する。

さらに、

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)^2 - 5(n+1) + 12}{2} - \frac{3n^2 - 5n + 12}{2} \\&= 3n - 1\end{aligned}$$

となるため、階差条件も満たす。

例題 3

数列 a_n が

$a_1 = 2$, $b_n = 2^n$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

例題 3 の解答

$n \geq 2$ では、初項と階差の和を考える。

$$\begin{aligned}a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\&= 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\&= 2 + 2^n - 2 \\&= 2^n\end{aligned}$$

したがって、 $a_n = 2^n$ である。

$n = 1$ のとき、 $2^1 = 2$ となり、初項 $a_1 = 2$ に一致する。

また、全ての正整数 n について

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= 2^{n+1} - 2^n \\&= 2^n\end{aligned}$$

となるため、階差 $b_n = 2^n$ と一致する。

演習問題

練習問題 1

数列 $a_n = n^2 + 2n$ の階差数列 b_n を求めよ。

練習問題 2

数列 a_n が

$a_1 = 3$, $b_n = 4n + 2$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 3

数列 a_n が

$a_1 = 10$, $b_n = -3$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 4

数列 a_n が

$a_1 = -5$, $b_n = 0$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 5

数列 a_n が

$a_1 = 1$, $b_n = 3^{n-1}$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

練習問題 6

ある数列 a_n の階差数列が $b_n = 2n$ である。この条件だけでは数列 a_n が一意に定まらない理由を説明し、異なる初項を持つ 2 つの数列の例を示せ。

練習問題 7

次の式が誤りである理由を説明し、正しい形に直せ。
数列 a_n の初項が $a_1 = 2$ 、階差数列が $b_n = n$ のとき、

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^n k$$

とした。

練習問題 8

数列 a_n が $a_1 = 4$, $b_n = 2^n - 1$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。
また、求めた一般項について、 $n = 1$ の初項と全ての正整数 n に対する $a_{n+1} - a_n = b_n$ を確認せよ。

練習問題 1 の解答・解説

階差数列は $b_n = a_{n+1} - a_n$ で求める。

$$\begin{aligned} b_n &= ((n+1)^2 + 2(n+1)) - (n^2 + 2n) \\ &= (n^2 + 2n + 1 + 2n + 2) - (n^2 + 2n) \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

したがって、 $b_n = 2n + 3$ である。

確認すると、 $a_2 - a_1 = (4 + 4) - (1 + 2) = 5$

また、 $b_1 = 2 + 3 = 5$ となり一致する。

練習問題 2 の解答・解説

$n \geq 2$ では、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

を使う。

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 2) \\ &= 3 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) \end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + 2n(n-1) + 2n - 2 \\ &= 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$n = 1$ のとき、 $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$

で初項に一致する。

さらに、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2(n+1)^2 + 1) - (2n^2 + 1) \\ &= 4n + 2 \end{aligned}$$

となり、階差条件を満たす。

練習問題 3 の解答・解説

階差が一定なので、 $n \geq 2$ では

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3) \\ &= 10 - 3(n-1) \end{aligned}$$

よって、 $a_n = 13 - 3n$ である。

$n = 1$ のとき、 $13 - 3 = 10$ となり、初項に一致する。

また、 $a_{n+1} - a_n = (13 - 3(n+1)) - (13 - 3n) = -3$ であり、階差条件を満たす。

練習問題 4 の解答・解説

階差が 0 であるため、隣接する項は変化しない。

$n \geq 2$ では、

$$\begin{aligned} a_n &= -5 + \sum_{k=1}^{n-1} 0 \\ &= -5 \end{aligned}$$

となる。

$n = 1$ でも

$a_1 = -5$ である。

また、 $a_{n+1} - a_n = (-5) - (-5) = 0$ となり、階差条件を満たす。

練習問題 5 の解答・解説

$n \geq 2$ では、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

である。

等比数列の和より、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \\ &= 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} \\ &= \frac{3^{n-1} + 1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$n = 1$ のとき、

$$\frac{3^0 + 1}{2} = 1$$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3^n + 1}{2} - \frac{3^{n-1} + 1}{2} \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

となり、階差条件を満たす。

練習問題 6 の解答・解説

階差数列は隣接する項の差を表すため、初項の情報を含まない。そのため、階差だけでは数列を一意に定めることはできない。

例えば、 $a_n = n(n-1)$ ($n \geq 1$)

という数列を考えると、 $a_1 = 1 \cdot 0 = 0$ である。

また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)n - n(n-1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

となる。

一方、 $a_n = 5 + n(n-1)$ ($n \geq 1$)では、 $a_1 = 5 + 1 \cdot 0 = 5$ であり、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (5 + (n+1)n) - (5 + n(n-1)) \\ &= 2n \end{aligned}$$

となる。

2つの数列は初項が異なるが、どちらも階差数列は $b_n = 2n$ である。

したがって、階差だけでは数列を一意に決めることはできず、初項が必要である。

練習問題 7 の解答・解説

誤りの原因は、 a_1 から a_n までの移動回数を間違えていることである。

a_1 から a_n へ進むには $n-1$ 回の変化が必要なので、 $n \geq 2$ では

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

である。

よって、

$$a_n = 2 + \frac{(n-1)n}{2}$$

となる。

$n=1$ のときは、 $a_1 = 2$ であり、初項にも一致する。

確認すると、

$$a_3 = 2 + \frac{2 \cdot 3}{2} = 5$$

である。

一方、誤った式

$$2 + \sum_{k=1}^n k$$

では、 $2 + 1 + 2 + 3 = 8$ となる。これは a_3 へ進むための変化 b_1, b_2 だけでなく、次の変化 b_3 まで加えており、 a_4 への移動分を含めているためである。

さらに、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(2 + \frac{n(n+1)}{2}\right) - \left(2 + \frac{(n-1)n}{2}\right) \\ &= n \end{aligned}$$

となり、全ての正整数 n で階差条件を満たす。

練習問題 8 の解答・解説

$n \geq 2$ では、初項と階差の和を考える。

$$\begin{aligned}a_n &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) \\&= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\&= 4 + (2^n - 2) - (n - 1) \\&= 2^n - n + 3\end{aligned}$$

したがって、 $a_n = 2^n - n + 3$ である。

$n = 1$ のとき、 $2^1 - 1 + 3 = 4$ となり、初項 $a_1 = 4$ に一致する。

また、全ての正整数 n について、

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= (2^{n+1} - (n+1) + 3) - (2^n - n + 3) \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

となる。

よって、求めた一般項は初項と階差条件の両方を満たす。