

第 179 講 逆関数

学習目標

この講では、関数の出力から入力を一意に戻せる条件を理解し、逆関数を求められるようになることを目標とする。具体的には、次のことができるようになる。

- ・逆関数が存在する条件を、入力と出力の対応から説明できる。
- ・逆関数と逆数 $\frac{1}{f(x)}$ の違いを区別できる。
- ・元の関数の定義域と値域が、逆関数ではどのように入れ替わるか説明できる。
- ・基本的な関数の逆関数を求められる。
- ・平方関数では定義域を制限しないと逆関数が作れない理由を説明できる。

関数と逆向きの対応

関数とは、入力を決めると出力がただ 1 つに決まる対応である。この講では、実数を入力し実数を出力する実数値関数を扱う。特に追加の指定がない場合、式が意味をもつ最大の実数範囲を定義域とする。例えば、 $f(x) = x^2$ では入力 2 に対して出力は 4 であり、 $f(2) = 4$ となる。また、入力 -2 に対しても $f(-2) = 4$ となる。このとき、通常関数としては問題ない。しかし、出力 4 から元の入力を戻そうとすると、入力が 2 なのか -2 なのか判断できない。逆関数とは、このように出力から入力を逆向きに戻す対応である。そのためには、1 つの出力に対して元の入力がただ 1 つに決まる必要がある。この性質を単射という。したがって、逆関数を考えるときは、式を変形する前に、異なる入力と同じ出力を作らないかを確認することが重要である。

逆関数の定義

実数値関数 f の定義域を D 、実際の値域を R とする。関数 f において、異なる 2 つの入力が同じ出力を作らないとき、 f は単射であるという。単射な関数では、値域 R の各値に対して元の定義域 D の入力がただ 1 つ対応する。このとき、その逆向きの対応を表す関数を逆関数といい、 $f^{-1}(x)$ と表す。元の関数が D から R への対応であるとき、逆関数は R を定義域、 D を値域にもつ。ここで、 $f^{-1}(x)$ は逆数を表すものではない。逆数とは、 $f(x) \neq 0$ のときの値 $\frac{1}{f(x)}$ 、つまり 1 を非零の $f(x)$ で割った値である。例えば、 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ である。一方、逆数は $\frac{1}{2x+1}$ であり、定義できる範囲は $x \neq -\frac{1}{2}$ である。

逆関数を考える 3 つの視点

逆関数を考えるときは、次の 3 点を確認する。

1. 出力から入力が 1 つに決まるか確認する。異なる入力と同じ出力を作らない単射であることが、逆関数を考えるための条件である。
2. 定義域と値域が交換されることを確認する。元の関数では定義域の値を入力して値域の値を出力する。逆関数では、その出力された値が入力となり、元の入力が出力になる。
3. x と y を入れ替えて式を解く。ただし、式変形だけで判断してはいけない。平方根などが現れる場合は、元の関数で決められていた範囲条件を保ったまま逆関数を作る必要がある。

グラフで見る逆関数

関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称になる。

元の関数のグラフ上の点 (a, b) は、 $b = f(a)$ を表す。逆関数では入力と出力が入れ替わるため、対応する点は (b, a) になる。

この反射によって、元の関数の定義域と値域は交換される。また、逆関数をもつためには、反射後のグラフが関数のグラフでなければならない。

元のグラフで同じ水平線上に異なる 2 点がある場合、それらの点を $y = x$ に関して反射した反射後の図形では、同じ垂直線上に異なる 2 点が現れる。この反射後の図形は関数のグラフの条件を満たさないため、元の関数には逆関数が存在しない。したがって、逆関数を考えるときは、元の関数のグラフを反射するだけでなく、反射後の図形が 1 つの入力に対して 1 つの出力を対応させる関数になるかを確認する必要がある。

逆関数を求めるときの注意

平方関数のように、同じ値を 2 つの入力が作る関数では、定義域を制限しない限り逆関数は存在しない。例えば、 $y = x^2$ では $x = 2$ と $x = -2$ が同じ値 4 を作る。一方、 $y = x^2$ ($x \geq 0$) のように定義域を制限すると、出力から入力が一意に決まり、逆関数を作ることができる。また、式変形の途中で平方根を使う場合でも、元の定義域による条件を忘れてはいけない。

例題 1

関数 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めなさい。ただし、定義域はすべての実数とする。

例題 1 の解答・解説

$y = f(x)$ とおくと、 $y = 2x + 1$ である。逆関数では入力と出力を入れ替えるため、 $x = 2y + 1$ となる。これを y について解くと、

$$\begin{aligned}x - 1 &= 2y \\y &= \frac{x - 1}{2}\end{aligned}$$

したがって、 $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ である。元の関数は傾きが 2 の一次関数であり、異なる入力が同じ出力を作らないため単射である。また、定義域がすべての実数であり、任意の実数 y に対して $x = \frac{y-1}{2}$ が実数として存在し、そのとき $f(x) = y$ となるため、値域もすべての実数である。逆関数の定義域と値域もともにすべての実数になる。確認として、全実数の範囲で $f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$ であり、 $f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1 = x$ となる。したがって、求めた関数は確かに逆関数である。

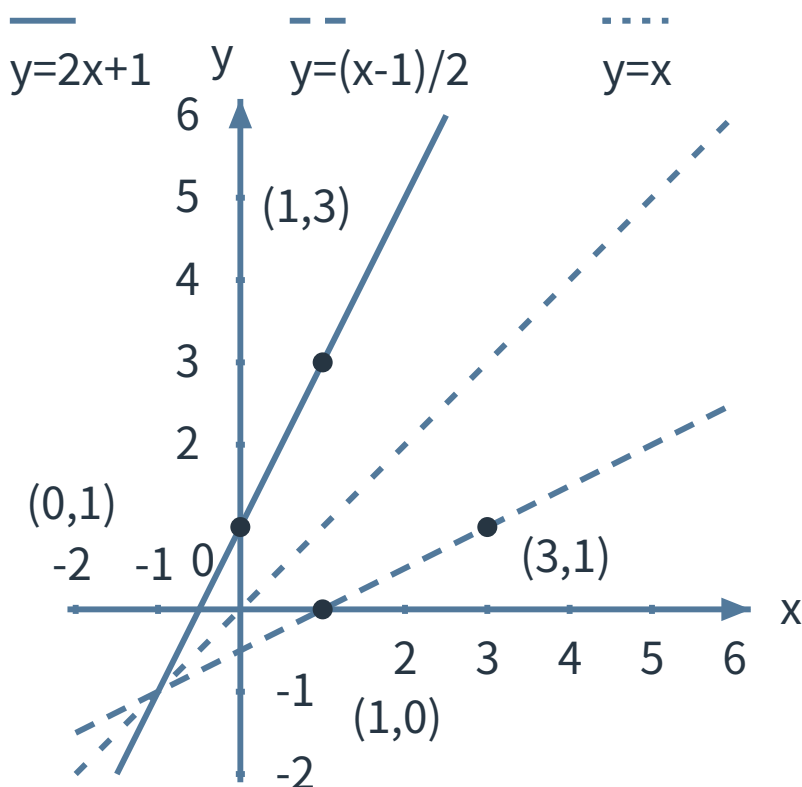


図 1 実線は $y=2x+1$ 、破線は逆関数 $y=(x-1)/2$ 、短い破線は反射軸 $y=x$ を表す。対応する点は x 座標と y 座標を入れ替えた位置にある。縦横は同じ縮尺である。図は各グラフの一部で、曲線の表示端は定義域の端ではない。

例題 2

関数 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) の逆関数を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

関数 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) では、入力範囲を 0 以上に制限している。この範囲では x が大きくなるほど x^2 も大きくなるため、異なる入力が同じ出力を作らず、単射である。 $y = x^2$ で x と y を入れ替えると、 $x = y^2$ となる。元の条件より逆向きの値も 0 以上でなければならないため、主平方根を用いて $y = \sqrt{x}$ となる。ここで、 $\sqrt{x}$ は平方根のうち非負の値を表す。平方根全体を表すものではない。したがって、 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。元の関数の定義域は $x \geq 0$ 、値域は $y \geq 0$ である。逆関数ではこれらが交換されるため、逆関数の定義域は $x \geq 0$ 、値域は $y \geq 0$ になる。また、 $x \geq 0$ の範囲では $\sqrt{x^2} = x$ であり、逆関係が正しく成り立つことを確認できる。

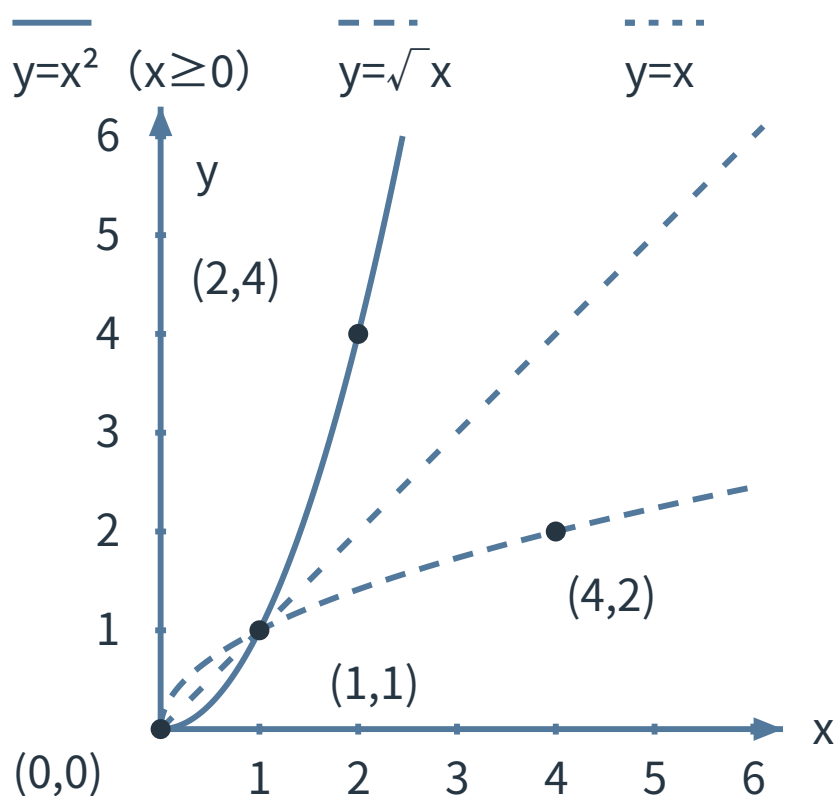


図2 実線は定義域を $x \geq 0$ に制限した $y=x^2$ 、破線はその逆関数 $y=\sqrt{x}$ 、短い破線は反射軸 $y=x$ を表す。平方根は主平方根であり、負側の枝は描いていない。両関数の原点は実際の端点なので閉点で示した。縦横は同じ縮尺である。表示窓は全定義域ではなく、反対側の表示端に端点の印を付けていない。

例題 3

次のように定めた関数が逆関数をもつか判断し、理由を説明しなさい。

- 定義域をすべての実数とし、 $x \geq 0$ のときは $f(x) = x + 1$ と定める。
- $x < 0$ のときは $f(x) = x + 3$ と定める。

例題 3 の解答・解説

逆関数をもつためには、出力から入力が見当がたった 1 つに決まる必要がある。この関数の値を調べる。 $x \geq 0$ の部分では、 $y = x + 1$ なので、値域は $y \geq 1$ である。 $x < 0$ の部分では、 $y = x + 3$ なので、値域は $y < 3$ である。ここで、例えば $y = 2$ を考える。 $x \geq 0$ の部分では、 $x + 1 = 2$ より、 $x = 1$ となる。 $x < 0$ の部分では、 $x + 3 = 2$ より、 $x = -1$ となる。つまり、 $f(1) = 2$ 、 $f(-1) = 2$ であり、1 つの出力から 2 つの入力が考えられる。したがって、この関数は単射ではなく、逆関数をもたない。

演習問題

練習問題 1

次の関数について、逆関数をもつか判断し、理由を説明しなさい。 $f(x) = x^2 + 1$ ただし、定義域はすべての実数とする。

練習問題 2

次の 2 つの式について、逆関数を表しているか、逆数を表しているかを答えなさい。関数

$f(x) = 3x - 2$ に対して、

(1) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

(2) $\frac{1}{f(x)}$

それぞれが何を表すか説明しなさい。

練習問題 3

関数 $f(x) = 5x - 4$ の逆関数を求めなさい。また、元の関数と逆関数について、定義域と値域をそれぞれ答えなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = x^2$ ($-3 \leq x \leq 0$) について、逆関数を求めなさい。また、逆関数の定義域と値域を明示しなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) の逆関数を $g(x)$ とする。次の関係を確認しなさい。 $g(f(4))$ の値を求め、逆関数が元の入力へ戻すことを説明しなさい。

練習問題 6

関数 $f(x) = 2x + 3$ のグラフ上の点 $(1, 5)$ に対応する、逆関数のグラフ上の点を答えなさい。また、その理由を説明しなさい。

練習問題 7

関数 $f(x) = \sqrt{x+2}$ について、逆関数を求めなさい。ただし、元の関数の定義域と値域を確認してから求めなさい。

練習問題 8

関数 $f(x) = \frac{x-1}{2}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 逆関数を求めなさい。
- (2) 合成関数 $f(f^{-1}(x))$ を計算し、逆関数の確認をなさい。

練習問題 1 の解答・解説

逆関数をもつためには、出力から入力が見ただけで1つに決まる必要がある。

この関数では、 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ であり、 $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ となる。同じ出力 5 に対して、入力が 2 と -2 の 2 つ存在する。したがって、出力から入力を 1 つに決めることができないため、この関数は単射ではなく、逆関数をもたない。

練習問題 2 の解答・解説

(1) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ は逆関数を表す。実際に $y = 3x - 2$ で x と y を入れ替えると、 $x = 3y - 2$ となる。これを解くと $y = \frac{x+2}{3}$ であるため、逆関数は $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ である。

(2) $\frac{1}{f(x)}$ は逆数を表す。逆数は $f(x) \neq 0$ のときに 1 を $f(x)$ で割った値であり、この場合は $\frac{1}{3x-2}$ である。定義できる範囲は $x \neq \frac{2}{3}$ である。

逆関数の定義域は元の関数の値域と交換される。 $f(x) = 3x - 2$ は全実数から全実数への関数なので、逆関数も全実数上で定義される。

なお、 $f^{-1}(1) = 1$ と $\frac{1}{f(1)} = 1$ は偶然同じ値になる。しかし、これは一部の値が一致しているだけであり、逆関数と逆数が同じ関数であることを意味しない。

練習問題 3 の解答・解説

$y = 5x - 4$ として、 x と y を入れ替える。 $x = 5y - 4$ より、

$$x + 4 = 5y$$

$$y = \frac{x+4}{5}$$

したがって、逆関数は $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$ である。元の関数は、定義域がすべての実数で、値域もすべての実数である。逆関数では定義域と値域が入れ替わるため、逆関数も定義域・値域ともにすべての実数である。

練習問題 4 の解答・解説

元の関数は $f(x) = x^2$ ($-3 \leq x \leq 0$) である。この範囲では負の側から 0 までを動くため、同じ値を 2 回とらず、逆関数を考えることができる。 x と y を入れ替えると、 $x = y^2$ となる。元の範囲より逆向きの値は $y \leq 0$ であるから、 $y = -\sqrt{x}$ となる。したがって、逆関数は $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ である。元の関数の定義域は $-3 \leq x \leq 0$ 、値域は $0 \leq y \leq 9$ である。逆関数では定義域と値域が交換されるため、逆関数の定義域は $0 \leq x \leq 9$ 、値域は $-3 \leq y \leq 0$ である。端点についても、元の関数で $x = -3$ は $y = 9$ に、 $x = 0$ は $y = 0$ に対応するため、逆関数でも範囲条件が保たれる。

練習問題 5 の解答・解説

元の関数は $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) である。この逆関数を $g(x)$ とすると、 $g(x) = \sqrt{x}$ である。元の関数の定義域は $x \geq 0$ 、値域は $y \geq 0$ である。逆関数ではこれらが交換されるため、 $g(x)$ の定義域は $x \geq 0$ 、値域は $y \geq 0$ になる。したがって、 $g(f(4)) = g(16) = 4$ である。さらに、元の関数の定義域である全ての $x \geq 0$ について、 $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ となる。これは、平方根を取るときに $x \geq 0$ という元の条件があるためであり、逆関数が元の入力を正しく復元していることを示している。

練習問題 6 の解答・解説

元の関数では点 $(1, 5)$ がグラフ上にある。これは、 $f(1) = 5$ を意味する。逆関数では入力と出力が入れ替わるため、対応する点は $(5, 1)$ になる。したがって、逆関数のグラフ上の点は $(5, 1)$ である。これは、逆関数のグラフが $y = x$ に関して元の関数のグラフと対称になることと一致する。

練習問題 7 の解答・解説

元の関数は $f(x) = \sqrt{x+2}$ である。非負実数 a に対して、 $\sqrt{a}$ は a の主平方根を表し、必ず 0 以上の値になる。正の実数 a の平方根は $\pm\sqrt{a}$ の 2 つであり、0 の平方根は 0 だけである。この違いに注意する必要がある。ここでは $x+2$ が根号の中にあるため、定義域は $x+2 \geq 0$ 、つまり $x \geq -2$ である。また、 $y = \sqrt{x+2}$ では $y \geq 0$ であり、逆に任意の $y \geq 0$ に対して $x = y^2 - 2$ とおけば $x+2 = y^2$ となるため、すべての $y \geq 0$ が実現する。したがって、元の関数の定義域は $x \geq -2$ 、値域は $y \geq 0$ である。逆関数を求めるために、 $x = \sqrt{y+2}$ として y について解く。

$$x^2 = y + 2$$

$$y = x^2 - 2$$

ただし、元の関数の値域が 0 以上であったため、逆関数の入力は $x \geq 0$ に制限される。したがって、逆関数は $f^{-1}(x) = x^2 - 2$ ($x \geq 0$) である。逆関数の定義域は $x \geq 0$ 、値域は $y \geq -2$ であり、元の関数の定義域と交換されている。確認すると、 $x \geq -2$ の範囲で $f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x+2})^2 - 2 = x$ となる。また、 $x \geq 0$ の範囲で $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{(x^2 - 2) + 2} = \sqrt{x^2} = x$ となる。したがって、対応する範囲で両方向の合成が元の値に戻る。

練習問題 8 の解答・解説

(1) 逆関数を求める。元の関数を $y = \frac{x-1}{2}$ とする。 x と y を入れ替えると、 $x = \frac{y-1}{2}$ となる。これを y について解くと、

$$2x = y - 1$$

$$y = 2x + 1$$

したがって、逆関数は $f^{-1}(x) = 2x + 1$ である。元の関数は傾きが $\frac{1}{2}$ の一次関数であり、全実数上で単射である。定義域はすべての実数であり、値域もすべての実数であるため、逆関数も全実数を定義域とする。

(2) 合成関数を確認する。 $f(f^{-1}(x))$ を計算すると、 $f(f^{-1}(x)) = \frac{(2x+1)-1}{2}$ である。 $f(f^{-1}(x)) = x$ となることから、逆関数を適用した後に元の関数を適用すると、逆関数へ入れた値 x に戻ることを確認できる。また、全実数の範囲で逆関数との対応が成立するため、求めた $f^{-1}(x) = 2x + 1$ は正しい逆関数である。