

第 22 講 正弦定理

学習目標

- 三角形で、辺 a, b, c と向かい合う角 A, B, C の対応を正しく判断できる。
- 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ を使える。
- 1 組の「辺とその向かいの角」が分かっているとき、正弦定理を使って未知の辺や角を求められる。
- 正弦定理を使う前に、どの辺とどの角が向かい合っているかを確認できる。

三角形では「向かい合う辺と角」を組にする

正弦定理では対応関係が最初のポイント

三角形 ABC を考えます。

角 A の向かいにある辺 BC の長さを a 、角 B の向かいにある辺 CA の長さを b 、角 C の向かいにある辺 AB の長さを c と表します。

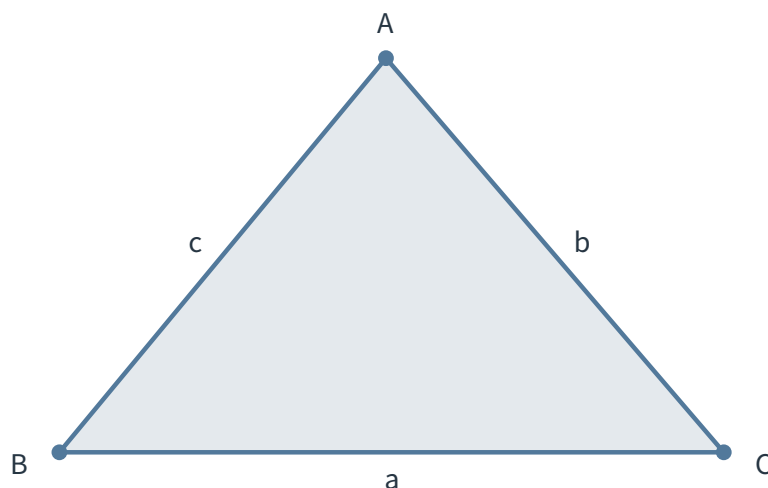


図 1 角 A と辺 a 、角 B と辺 b 、角 C と辺 c が向かい合う

正弦定理では、

- 角 A と辺 a
- 角 B と辺 b
- 角 C と辺 c

をそれぞれ 1 組として扱います。

辺の名前が「角のとなり」ではなく、その角の向かい側にある辺によって決まることが重要です。

辺と角の対応

三角形 ABC では、次の対応を最初に確認します。

- a は角 A の向かいの辺
- b は角 B の向かいの辺
- c は角 C の向かいの辺

正弦定理を使うときは、この対応を崩さずに式をつくります。

正弦定理とは何か

正弦定理

三角形 ABC で、辺 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とすると、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

が成り立ちます。

これを**正弦定理**といいます。

辺と向かいの角の正弦を対応させる

正弦定理では、辺の長さと、その向かいにある角の正弦を対応させています。

たとえば、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

では、辺 a と角 A 、辺 b と角 B がそれぞれ対応しています。

正弦定理を使うときに最も多い誤りは、辺と角の対応を取り違えることです。

公式を代入する前に、図を見て「この辺の向かいは何度か」を確認します。

となりの角を使わない

辺 a に対して使うのは $\sin A$ です。

辺 a の端にある角 B や角 C を対応させるわけではありません。

たとえば、

$$\frac{a}{\sin B}$$

のように、向かい合っていない辺と角を組にすると正弦定理にはなりません。

どんなときに正弦定理を使うか

1組の辺と向かいの角が見えているか

正弦定理が特に使いやすいのは、次のような場合です。

- 1つの辺と、その向かいの角が分かっている。
- さらに別の角が分かっていて、その向かいの辺を求めたい。
- 2つの辺と、そのうち一方の向かいの角が分かっていて、もう一方の角を求めたい。

たとえば、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ 、 $a = 6$ が分かっていて b を求める場合、 a と A が1組そろっています。

そこで、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

を使えます。

正弦定理では、**分かっている辺とその向かいの角がセットになっているか**を見ることが、解法選択の目印です。

正弦定理を使う判断

問題文や図を見たら、次の順に確認します。

1. 辺 a, b, c と角 A, B, C の対応を確認する。
2. 「辺とその向かいの角」が 1 組そろっているか探す。
3. 求めたい辺または角を含む 2 組だけを正弦定理から取り出す。
4. 式を解く。

辺の長さを求める

必要な 2 組だけ使えばよい

正弦定理は 3 つの比が等しい式ですが、毎回すべてを書く必要はありません。

たとえば、辺 a と角 A が分かっている、角 B から辺 b を求めたいなら、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

だけを使えば十分です。

求めるものに関係する 2 組を選ぶと、式が簡潔になります。

角を求める場合

辺と正弦の比から角の正弦を求める

辺 a 、辺 b 、角 A が分かっているときは、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

から $\sin B$ を求めることができます。

たとえば、 $a = 4$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ 、 $A = 30^\circ$ なら、

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin B}$$

となります。

これを整理すると $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

この段階では、問題の条件に合う角を考える必要があります。L01 では、特別な角の三角比から判断できる問題を扱います。

正弦の値だけでは角が 1 つに決まらないことがある

$0^\circ < A < 180^\circ$ の範囲では、たとえば $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$ です。

そのため、 $\sin B = \frac{1}{2}$ と分かっただけでは、 $B = 30^\circ$ と $B = 150^\circ$ の可能性があります。

実際の問題では、三角形の内角の和や他の角の大きさを使って、条件に合う角を選びます。

例題

例題 1

三角形 ABC で、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ 、 $a = 6$ とする。
辺 b の長さを求めなさい。

例題 1 の解答・解説

辺 a は角 A の向かい、辺 b は角 B の向かいです。

正弦定理より、

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を使うと、

$$\frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

です。

左辺は 12 なので、 $b = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ です。

したがって、 $b = 6\sqrt{2}$ です。

例題 2

三角形 ABC で、 $A = 60^\circ$ 、 $C = 30^\circ$ 、 $c = 5$ とする。

辺 a の長さを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

辺 a と角 A 、辺 c と角 C を対応させます。

正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin 30^\circ}$$

です。

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10$$

です。

したがって、 $a = 5\sqrt{3}$ です。

例題 3

三角形 ABC で、 $A = 30^\circ$ 、 $a = 4$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ とする。

角 B を求めなさい。ただし、 B は鋭角とする。

例題 3 の解答・解説

正弦定理より、

$$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin B}$$

です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、左辺は 8 です。

したがって、 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin B} = 8$ となり、 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

B は鋭角なので、 $B = 45^\circ$ です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 60^\circ$ 、 $a = 4$ とする。
辺 b の長さを求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 $A = 45^\circ$ 、 $C = 30^\circ$ 、 $c = 6$ とする。
辺 a の長さを求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 $B = 30^\circ$ 、 $C = 45^\circ$ 、 $b = 5$ とする。
辺 c の長さを求めなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 $A = 60^\circ$ 、 $a = 6\sqrt{3}$ 、 $b = 6$ とする。
角 B を求めなさい。ただし、 B は鋭角とする。

練習問題 5

三角形 ABC で、 $A = 45^\circ$ 、 $a = 8$ 、 $c = 4\sqrt{2}$ とする。
角 C を求めなさい。ただし、 C は鋭角とする。

練習問題 6

三角形 ABC で、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 120^\circ$ 、 $a = 3$ とする。
辺 b の長さを求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC で、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ 、 $a = 2\sqrt{2}$ とする。

(1) 辺 b の長さを求めなさい。

(2) 角 C を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、三角形 ABC で $A = 30^\circ$ 、 $B = 60^\circ$ 、 $a = 5$ のとき、

$$\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin A}$$

として辺 b を求めようとした。

この式が誤っている理由を説明し、正しい式を書きなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

正弦定理より、

$$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

です。

左辺は 8 なので、 $b = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ です。

したがって、 $b = 4\sqrt{3}$ です。

練習問題 2 の解答・解説

辺 a と角 A 、辺 c と角 C を対応させます。

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ}$$

右辺は 12 です。

したがって、 $a = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

正弦定理より、

$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$$

です。

左辺は 10 なので、 $c = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ です。

したがって、 $c = 5\sqrt{2}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

正弦定理より、

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin B}$$

です。

左辺は 12 なので、 $\frac{6}{\sin B} = 12$ です。

したがって、 $\sin B = \frac{1}{2}$ です。

B は鋭角なので、 $B = 30^\circ$ です。

練習問題 5 の解答・解説

正弦定理より、

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin C}$$

です。

左辺は $8\sqrt{2}$ なので、 $\sin C = \frac{1}{2}$ です。

C は鋭角なので、 $C = 30^\circ$ です。

練習問題 6 の解答・解説

正弦定理より、

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ}$$

です。

左辺は 6 です。

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、 $b = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ です。

したがって、 $b = 3\sqrt{3}$ です。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 正弦定理より、

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

です。

左辺は $4\sqrt{2}$ なので、 $b = 4$ です。

(2) 三角形の内角の和は 180° です。

したがって、 $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$ です。

練習問題 8 の解答・解説

正弦定理では、辺とその向かいの角を 1 組として対応させます。

辺 a の向かいの角は A なので、 a と $\sin A$ を組にします。

また、辺 b の向かいの角は B なので、 b と $\sin B$ を組にします。

したがって、正しい式は、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

です。