第 261 講 図・表・式を使い分ける

学習目標

- 一つの数量関係を、図、表、式へ正しく書き換えられる。
- 表現を変えるとき、変数の意味、単位、範囲を保てる。
- 図や表から規則を予想し、式によって予想が成り立つ理由を説明できる。

1. 同じ関係を三つの表現で捉える

表現を変えても、条件は変えない

図、表、式は、同じ数量関係の異なる見せ方である。表現を書き換えるときは、数値だけでなく、次の情報も引き継ぐ必要がある。

- 何を x、何を y とするか。
- 数量の単位は何か。
- x が整数か実数か、どの範囲を動くか。
- 一定に増える量と、初めからある量は何か。

例えば、通信量 1 GB 当たり 120 円と基本料金 50 円からなる料金を考える。通信量を実数 x GB、料金を y 円とし、$0 \leq x \leq 4$ とすれば、対応は次の図で表せる。

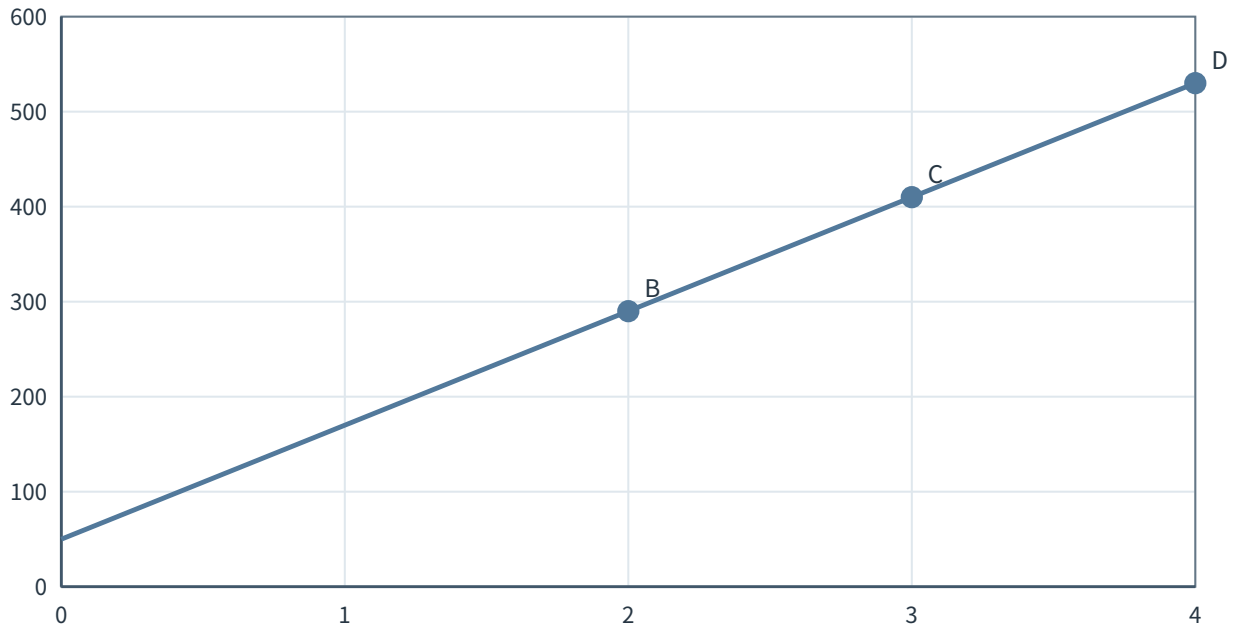

図 1　通信量 x と料金 y の対応

この図を、$x = 1, 2, 3, 4$ の場合について表にすると次のようになる。

x（GB）	1	2	3	4
$120x$（円）	120	240	360	480
y（円）	170	290	410	530

図の傾き 120 と切片 50 を式にまとめれば、$y = 120x + 50$ となる。ただし、この場面で式を使える範囲は $0 \leq x \leq 4$ である。図の直線や式だけを見て $x = 5$ を扱うと、場面に与えられた範囲から外れる。

©ミライコーチング

図・表・式をつなぐ見方

- 図は、操作の順序や関係のつながりを示す。
- 表は、選んだ値どうしの対応を示す。
- 式は、すべての場合に共通する関係を文字で示す。

書き換えた後も、同じ入力に対して同じ出力が得られることを確かめるのである。

例題 1：操作から表と式を作る

ある工作で、台紙 1 枚に星形のシールを 4 枚ずつ貼り、見本用のシールを別に 2 枚使う。台紙の枚数を x 枚、使うシールの総数を y 枚とする。ただし、x は 1 以上 8 以下の整数である。「台紙の枚数を 4 倍し、2 を加える」という操作を用いて答えよ。
(1) $x = 1, 2, 3, 4$ に対する y の値を表にせよ。
(2) x と y の関係を式で表せ。
(3) 式に添えるべき x の範囲を書け。

例題 1 の解答・解説

(1) 4 倍してから 2 を加えるので、表は次のようになる。

x（枚）	1	2	3	4
y（枚）	6	10	14	18

(2) 台紙に貼るシールは $4x$ 枚であり、見本用の 2 枚を加えるので、$y = 4x + 2$ である。
(3) x は 1 以上 8 以下の整数である。したがって、式と条件を合わせて

$$y = 4x + 2 \qquad (x = 1, 2, \ldots, 8)$$

と表せる。問題文から操作を読み、表で具体的な値を確認し、式で一般の関係を表したのである。

2. 表から式を作り、構造を確かめる

差だけでなく、最初の量も見る

x が 1 増えるたびに y が一定量ずつ増える表では、$y = ax + b$ という式が候補になる。a は x が 1 増えたときの y の増加量である。しかし、増加量だけでは式は決まらない。b に当たる、x によらない一定部分も確かめる必要がある。$x = 0$ が定義域に含まれる場合、b はそのときの値である。

x	1	2	3	4
y	7	12	17	22

この表では、x が 1 増えると y は 5 増えるので、$a = 5$ と予想できる。$y = 5x + b$ に $(x, y) = (1, 7)$ を代入すると、$7 = 5 + b$ より $b = 2$ である。したがって、$y = 5x + 2$ となる。

操作の「5 倍」と「2 を加える」は、式の $5x$ と $+2$ にそれぞれ対応する。表の差だけを見て $y = 5x$ とすると、$x = 1$ のとき $y = 5$ となり、表の 7 と一致しない。

有限個の値だけでは規則は一つに決まらない

表に並ぶ数値から $y = 5x + 2$ を予想できても、「すべての x でこの式に従う」という条件がなければ、表の外の値まで一意には決まらない。式へ書き換えるときは、問題文に一定の規則が示されているかを確認する必要がある。

©ミライコーチング

例題 2：表から式を作る

同じ大きさの正方形を横一列に並べる。正方形が 1 個のときに必要な棒は 4 本であり、正方形を右に 1 個増やすたびに、隣り合う 1 辺を共有するので棒は 3 本増える。正方形の個数を x 個、棒の本数を y 本とする。次の表を用いて答えよ。

x（個）	1	2	3	4	5
y（本）	4	7	10	13	16

(1) y を x の式で表せ。
(2) 式の各部分が、棒の並べ方の何を表すか説明せよ。
(3) $x = 12$ のときの棒の本数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 正方形が 1 個増えるごとに棒は 3 本増えるので、$y = 3x + b$ と考える。$(x, y) = (1, 4)$ を代入すると、$4 = 3 + b$ より $b = 1$ である。したがって、$y = 3x + 1$ である。ただし、x は正の整数である。
(2) 各正方形について新しく数える 3 本が $3x$ に当たり、列の端に残る 1 本が $+1$ に当たる。この数え方なら、最初の正方形だけを特別扱いせず、どの正の整数 x に対しても同じ構造で説明できる。
(3) $x = 12$ を代入して、$y = 3 \times 12 + 1 = 37$ である。よって、棒は 37 本必要である。

3. 式から表と図を作り、条件を読み直す

式を具体化するときは、値の選び方を明らかにする

式から表を作るとき、すべての値を並べる必要はない。確認したい範囲から代表的な値を選び、代入して対応を作る。ただし、定義域が整数なら整数だけを選び、単位があれば表の見出しに書く。また、式を図にするときは、計算の順序を逆にしてはいけない。例えば $y = 3(x + 2)$ は「2 を加えてから 3 倍する」であり、$y = 3x + 2$ は「3 倍してから 2 を加える」である。二つの式は同じではない。

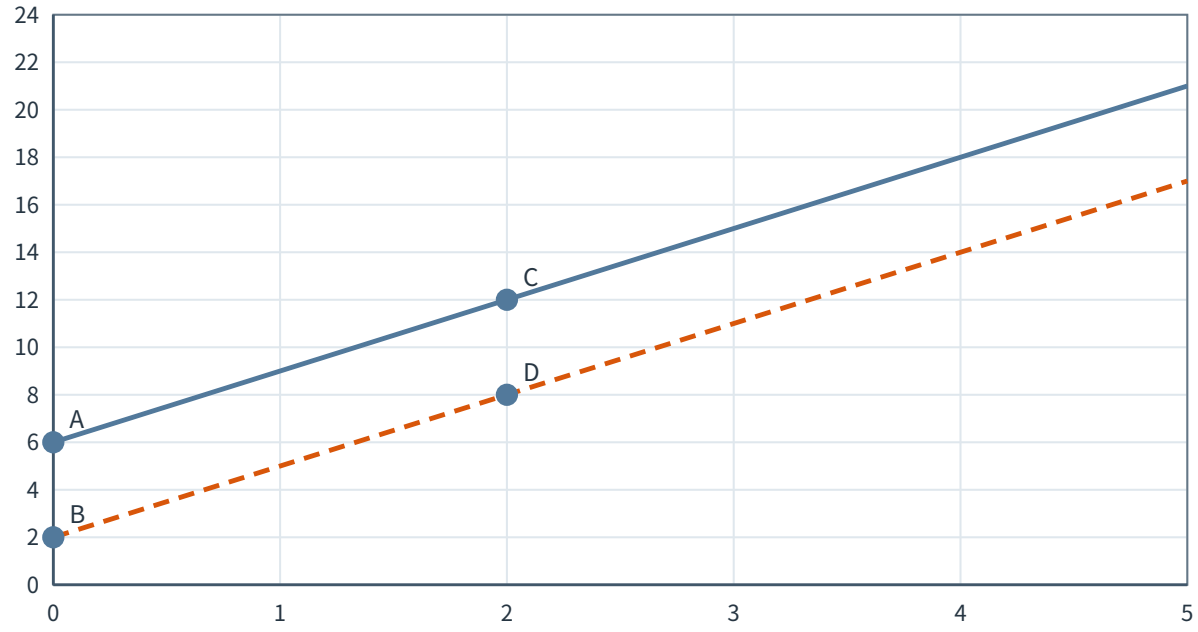

図 2　操作順序が異なる二つの式

図 2 では、上側の実線が $y=3(x+2)$、下側の破線が $y=3x+2$ である。同じ傾きでも、操作の順序が異なるため切片が異なる。

例題 3：式から図と表を作る

長さ x cm のひもを 2 本と、長さ 3 cm のひもを 1 本つないだときの全体の長さを y cm とする。$y=2x+3$ であり、$1 \le x \le 5$ とする。
(1) 式に対応する操作を、順に言葉で書け。
(2) $x=1,2,3,4,5$ に対する y の表を作れ。
(3) x と y の単位を m に変えて同じ式 $y=2x+3$ をそのまま使ってよいか。理由を述べよ。

例題 3 の解答・解説

(1) x を 2 倍し、その結果に 3 を加える。
(2) 表は次のようになる。

x（cm）	1	2	3	4	5
y（cm）	5	7	9	11	13

(3) そのまま使ってはいけない。式の 3 は 3 cm を表しているからである。x と y を m で表すなら、$3\,\mathrm{cm}=0.03\,\mathrm{m}$ なので、式と範囲は

$$y=2x+0.03 \qquad (0.01 \le x \le 0.05)$$

となる。ここで x は実数である。表現を変えるときも、数量の意味、単位、範囲をそろえる必要がある。

4. 書き換えが正しいかを検算する

三つの確認

1. 同じ x を入れたとき、図、表、式で同じ y が得られるか。
2. 変数の意味、単位、整数か実数か、範囲が保たれているか。
3. 図の操作順序と、式の計算順序が一致しているか。

表現を一度で書き換えて終わりにせず、表にある端の値や途中の値を式へ代入して確かめるとよい。1 組の値が合うだけでは不十分である。増え方と初めの量の両方が一致することを確認するのである。

演習問題

問題 1：操作を式にする

入力 x を 7 倍し、その後で 4 を引いて出力 y を得る。
(1) この関係を式で表せ。
(2) $x=0,1,2,3$ に対する y の表を作れ。
(3) 「4 を引いてから 7 倍する」という操作の式を書き、(1)の式と同じでないことを $x=2$ で確かめよ。

問題 2：表を式にする

次の表は、0 以上の整数 x に対して $y = ax + b$ の形で表され、x が 1 増えるたびに y が 4 増える関係の一部である。

x	0	1	2	3	4
y	6	10	14	18	22

(1) y を x の式で表せ。
(2) $x = 25$ のときの y を求めよ。

問題 3：単位を保って書き換える

1 個 80 円の消しゴムを x 個買い、包装代 30 円を 1 回だけ払う。代金を y 円とし、x は 1 以上 10 以下の整数とする。
(1) x と y の関係を式で表せ。
(2) $x = 1, 5, 10$ に対する y の表を、単位が分かるように作れ。
(3) 式だけでは伝わりにくい、この場面の条件を二つ挙げよ。

問題 4：式から操作を考える

式 $y = 4(x - 1) + 6$ について答えよ。
(1) 入力 x から出力 y までの操作を順に言葉で表せ。
(2) $y = 4x - 1 + 6$ と読み替えてはいけない理由を、$x = 3$ のときの値を比較して説明せよ。
(3) $x = 1, 2, 3, 4$ に対する y の表を作れ。

問題 5：規則を説明する

長方形の花壇を横一列に並べる。花壇が 1 個のとき境界用の板は 6 枚必要であり、1 個増やすたびに共有する境界があるため 4 枚ずつ増える。花壇の個数を x 個、板の総数を y 枚とする。ただし、x は正の整数である。
(1) $x = 1, 2, 3, 4$ に対する y の表を作れ。
(2) y を x の式で表せ。
(3) 式の定数項がどのように求まるかを説明せよ。

問題 6：誤った書き換えを直す

正の整数 x に対して $y = ax + b$ の形で表され、x が 1 増えるたびに y が 3 増える関係がある。ある人が、次の表から $y = 3x$ と書いた。

x	1	2	3	4
y	5	8	11	14

(1) $y = 3x$ が表と一致しないことを示せ。
(2) 表が一定の規則に従うとして、正しい式を求めよ。
(3) 正しい式に対応する操作を順に言葉で表せ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) 7 倍してから 4 を引くので、$y = 7x - 4$ である。
(2) 表は次のようになる。

x	0	1	2	3
y	-4	3	10	17

(3) 4 を引いてから 7 倍する式は $y = 7(x - 4)$ である。$x = 2$ のとき、(1)では $y = 7 \times 2 - 4 = 10$ であるが、後の式では $y = 7(2 - 4) = -14$ である。操作の順序が変わると関係も変わる。

問題 2 の解答・解説

(1) x が 1 増えると y は 4 増えるので、$y = 4x + b$ と考える。$x = 0$ のとき $y = 6$ であるから $b = 6$ であり、$y = 4x + 6$ である。
(2) $x = 25$ を代入すると、$y = 4 \times 25 + 6 = 106$ である。

問題 3 の解答・解説

(1) 消しゴムの代金は $80x$ 円であり、包装代 30 円を加えるので、$y = 80x + 30$ である。ただし、$x = 1, 2, \ldots, 10$ である。
(2) 表は次のようになる。

x（個）	1	5	10
y（円）	110	430	830

(3) 例えば、x は個数を表す 1 以上 10 以下の整数であること、y の単位は円であることが挙げられる。また、包装代 30 円は個数によらず 1 回だけ加えるという条件も重要である。

問題 4 の解答・解説

(1) x から 1 を引き、その結果を 4 倍し、最後に 6 を加える。
(2) $x = 3$ のとき、もとの式では $y = 4(3 - 1) + 6 = 14$ である。一方、$y = 4x - 1 + 6$ では $y = 12 - 1 + 6 = 17$ である。括弧内を先に計算するという操作を保たなければならない。
(3) 表は次のようになる。

x	1	2	3	4
y	6	10	14	18

問題 5 の解答・解説

(1) 1 個のとき 6 枚であり、その後は 4 枚ずつ増える。

x（個）	1	2	3	4
y（枚）	6	10	14	18

(2) 増加量から $y = 4x + b$ と考える。$(x, y) = (1, 6)$ を代入すると $b = 2$ なので、$y = 4x + 2$ である。ただし、x は正の整数である。
(3) $x = 1$ のときの 6 枚から、1 個当たりの増加量 4 枚を引くと $6 - 4 = 2$ となる。この 2 が定数項である。

©ミライコーチング

問題 6 の解答・解説

(1) 例えば $x = 1$ のとき、$y = 3x$ なら $y = 3$ となるが、表では $y = 5$ であるため一致しない。
(2) x が 1 増えると y は 3 増えるので、$y = 3x + b$ と考える。$(x, y) = (1, 5)$ を代入すると $b = 2$ である。したがって、正しい式は $y = 3x + 2$ である。
(3) 入力 x を 3 倍し、その結果に 2 を加えて出力 y を得る。

©ミライコーチング