第 225 講 ベクトルの内積

学習目標

- 内積が 2 つのベクトルから得られる数であることを説明できる。
- 2 つのベクトルの大きさとなす角から内積を求められる。
- 成分表示された 2 つのベクトルの内積を計算できる。
- 内積の正負や 0 を、なす角による定義と結び付けて説明できる。
- 零ベクトルを含む場合の内積と、なす角の扱いを区別できる。

1. 内積とは

2 つのベクトルから得られる数

0 でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ のなす角を θ（$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$）とする。このとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

で定める。内積の結果はベクトルではなく、1 つの実数である。

一方のベクトルへの投影で考える

2 つのベクトルは、始点をそろえて考える。$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の成分は $|\vec{b}|\cos\theta$ である。したがって、内積は「$\vec{a}$ の長さ」と「$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の成分」との積である。

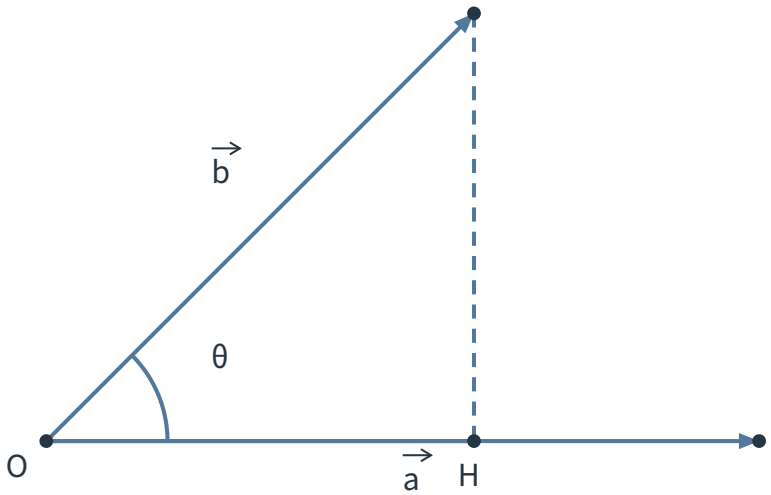


図 1　内積は一方のベクトルへの投影を用いて表せる

よって、$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left(|\vec{b}|\cos\theta\right)$ である。θ が鈍角なら $\cos\theta < 0$ となるため、投影の向きが $\vec{a}$ と反対であることを負の符号で表す。

順序を入れ替えても同じ

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は共通であり、実数の積は順序を入れ替えられるので、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

である。

2. 成分による内積

成分表示の計算公式

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

である。同じ位置の成分どうしを掛け、その結果を加える。

成分公式が成り立つ理由

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$ である。三角形に余弦定理を用いると、

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である。一方、成分から大きさの 2 乗を計算すると、

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$$

である。両辺を展開して共通部分を消すと、

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

を得る。左辺は内積の定義なので、成分公式が成り立つ。

掛け方と足し方に注意する

$(a_1+a_2)(b_1+b_2)$ ではない。また、$a_1b_2+a_2b_1$ のように異なる位置の成分を掛けない。例えば、$(2,-1)\cdot(3,4)=2\cdot3+(-1)\cdot4=2$ である。

3. 内積の符号と角

正・0・負が表すこと

0 でない 2 つのベクトルでは、$|\vec{a}||\vec{b}|>0$ である。したがって、内積の符号は $\cos\theta$ の符号と一致する。

- $0^\circ\le\theta<90^\circ$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ である。
- $\theta=90^\circ$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である。
- $90^\circ<\theta\le180^\circ$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ である。

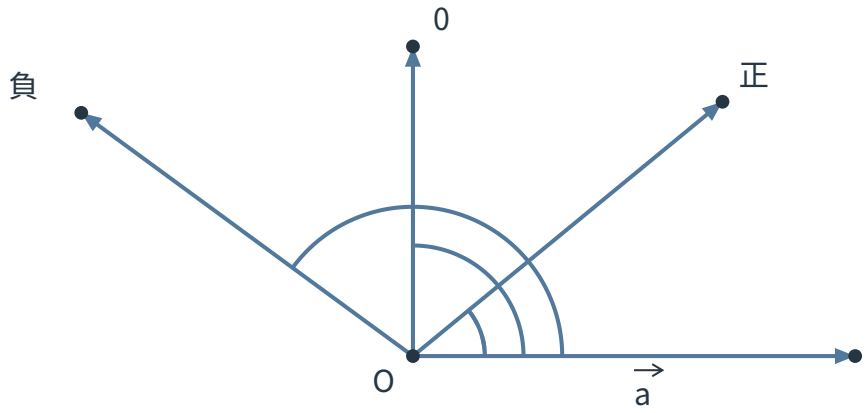


図 2　なす角と内積の符号

内積が 0 なら常に角が 90°とは限らない

$\vec{0}\cdot\vec{b}=0$ であり、$\vec{a}\cdot\vec{0}=0$ である。しかし、零ベクトルには向きがないので、零ベクトルと他のベクトルのなす角は定めない。したがって、「内積が 0 なら直角」と言えるのは、両方が 0 でない場合だけである。

同じベクトルどうしの内積

0 でない $\vec{a}$ とそれ自身のなす角は 0° なので、

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

である。この等式は $\vec{a}=\vec{0}$ の場合にも成り立つ。

4. 例題

例題 1：大きさとなす角から求める

$|\vec{a}|=4$、$|\vec{b}|=3$、2 つのベクトルのなす角が 60° のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

定義より、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cdot\cos60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6$$

である。

例題 2：成分から求める

$\vec{a}=(-2,5)$、$\vec{b}=(3,4)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

同じ位置の成分どうしを掛けて加えるので、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\cdot 3+5\cdot 4=-6+20=14$$

である。

例題 3：内積の符号を判断する

$\vec{a}=(2,1)$、$\vec{b}=(-1,3)$ の内積を求め、その符号を答えよ。

例題 3 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+1\cdot 3=1>0$$

である。したがって、内積の符号は正である。

例題 4：未知数を含む内積

$\vec{a}=(x,2)$、$\vec{b}=(3,-1)$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ を満たすとき、x を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$$3x+2\cdot(-1)=4$$

より、$3x-2=4$ である。したがって、$x=2$ である。

5. 演習問題

演習 1：定義による計算

$|\vec{a}|=5$、$|\vec{b}|=2$、なす角が 120° のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

演習 2：成分による計算

$\vec{a}=(4,-3)$、$\vec{b}=(-2,5)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

演習 3：内積が 0 になる例

$\vec{a}=(3,2)$、$\vec{b}=(2,-3)$ の内積を求めよ。

演習 4：同じベクトルどうし

$\vec{a}=(-6,8)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{a}$ を求めよ。また、$|\vec{a}|$ を求めよ。

演習 5：零ベクトル

$\vec{a}=(7,-1)$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{0}$ を求めよ。また、$\vec{a}$ と $\vec{0}$ のなす角について述べよ。

©ミライコーチング

演習 6：未知数

$\vec{a}=(k,4)$、$\vec{b}=(2,-3)$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$ を満たすとき、k を求めよ。

演習 7：内積の符号

$\vec{a}=(-1,2)$ とする。次の各内積を求め、その符号を正、0、負のいずれかで答えよ。
(1) $\vec{b}=(3,1)$
(2) $\vec{c}=(2,1)$
(3) $\vec{d}=(1,-3)$

演習 8：内積の基本性質

$\vec{a}=(1,-2)$、$\vec{b}=(3,4)$、$\vec{c}=(-2,5)$ のとき、次の値を求めよ。
(1) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

6. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot2\cdot\cos120^\circ=10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

である。鈍角なので内積は負になる。

演習 2 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot(-2)+(-3)\cdot5=-8-15=-23$$

である。

演習 3 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2+2\cdot(-3)=6-6=0$$

である。この 2 つは零ベクトルではない。

演習 4 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=(-6)^2+8^2=36+64=100$$

である。また、$|\,\vec{a}\,|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ より、$|\,\vec{a}\,|=\sqrt{100}=10$ である。大きさは負でない平方根をとる。

演習 5 の解答・解説

$\vec{0}=(0,0)$ なので、

$$\vec{a}\cdot\vec{0}=7\cdot0+(-1)\cdot0=0$$

である。ただし、零ベクトルには向きがないため、$\vec{a}$ と $\vec{0}$ のなす角は定めない。

©ミライコーチング

演習 6 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2k+4\cdot(-3)=2k-12$$

である。$2k-12=-4$ より、$2k=8$ なので、$k=4$ である。

演習 7 の解答・解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot 3+2\cdot 1=-1$ なので、符号は負である。
(2) $\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1)\cdot 2+2\cdot 1=0$ である。
(3) $\vec{a}\cdot\vec{d}=(-1)\cdot 1+2\cdot(-3)=-7$ なので、符号は負である。

演習 8 の解答・解説

$\vec{b}+\vec{c}=(1,9)$ なので、

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1\cdot 1+(-2)\cdot 9=-17$$

である。一方、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 3+(-2)\cdot 4=-5$$

かつ、

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot(-2)+(-2)\cdot 5=-12$$

であるから、$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-17$ である。したがって、(1)、(2) はともに -17 である。

©ミライコーチング