

第 49 講 メネラウスの定理

学習目標

- メネラウスの定理で使う 3 点の配置を正しく読み取れる。
- 辺の延長上の点を含めて、3 つの比を正しい向きで書ける。
- 3 点が一直線上にあるとき、3 つの比の積が 1 になることを使える。
- 3 つの比から未知の比や長さを求めたり、3 点が一直線上にあるか判断したりできる。

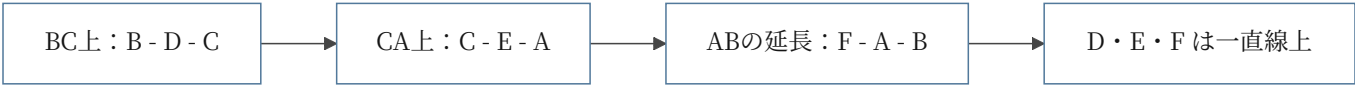
三角形と一直線上の 3 点

基本となる配置

三角形 ABC を考えます。
点 D は辺 BC 上、点 E は辺 CA 上にあるとします。
さらに、辺 AB を A の側へ延長し、その延長上に点 F をとります。
この講では、次の配置を基本とします。

直線	点の並び
BC	$B - D - C$
CA	$C - E - A$
AB の延長	$F - A - B$

そして、 D, E, F が 1 本の直線上に並んでいる場合を考えます。



チェバの定理との見分け

- 前講のチェバの定理では、三角形の 3 頂点から引いた 3 本の線分が **1 点で交わる** ことに注目しました。
- メネラウスの定理では、三角形の辺またはその延長上にある **3 点が一直線上にある** ことに注目します。
- 1 点で交わる → チェバの定理
 - 3 点が一直線上 → メネラウスの定理

メネラウスの定理

メネラウスの定理

三角形 ABC で、

- D は辺 BC 上
- E は辺 CA 上
- F は辺 AB の A 側の延長上

にあり、 D, E, F が一直線上にあるとします。

このとき、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

が成り立ちます。

逆に、この基本配置で 3 つの比の積が 1 なら、 D, E, F は一直線上にあります。

この講で使う基本形

覚える式は、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

この講では符号付き線分は使わず、すべて正の長さの比として扱います。

比の向きをそろえる

B から C、C から A、A から B へ進む

メネラウスの定理では、比の向きを途中で逆にとすると正しい式になりません。

基本形では、三角形を

$B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$

と一周するように比を作ります。

辺 BC では、

$$\frac{BD}{DC}$$

です。

辺 CA では、

$$\frac{CE}{EA}$$

です。

辺 AB の延長では、

$$\frac{AF}{FB}$$

です。

この 3 つを同じ向きで並べて掛けます。



比の向きを再現する手順

1. D について $\frac{BD}{DC}$ を書く。
2. E について $\frac{CE}{EA}$ を書く。
3. F について $\frac{AF}{FB}$ を書く。
4. 3つを掛けて 1 とする。

公式を数値だけで覚えず、点の並びと一緒に再現します。

1つだけ逆向きにしない

たとえば、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{AF}{FB}$$

のように、真ん中の比だけを逆にすると基本形にはなりません。

3つの比の向きを一貫させることが大切です。

延長上の点 F を正しく読む

F-A-B の順に並ぶ

この講の基本配置では、点 F は辺 AB の A 側の延長上にあります。

点の順序は、

$$F - A - B$$

です。

したがって、長さについて、

$$FB = FA + AB$$

が成り立ちます。

たとえば、

$$AF = 4, \quad AB = 7$$

なら、

$$FB = 11$$

です。

延長上での長さの関係

点の並びが $F - A - B$ なら、

$$FB = FA + AB$$

です。

したがって、

$$AF < FB$$

となり、

$$\frac{AF}{FB} < 1$$

です。

計算結果を確かめるときにも使えます。

FB を AB-AF としない

F は線分 AB の内部ではなく、 A の外側にあります。

そのため、

$$FB = AB - AF$$

ではありません。

点の並び $F - A - B$ を先に確認します。

積が 1 になる条件を使う

未知の比を 1 つ求める

D, E, F が一直線上にあり、

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

とします。

メネラウスの定理より、

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

最初の 2 つの積は 3 なので、

$$3 \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

となります。

したがって、

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

です。

よって、

$$AF : FB = 1 : 3$$

となります。

未知の比を求める手順

1. D, E, F の位置を確認する。
2. メネラウスの定理を書く。
3. 分かっている比を代入する。
4. 未知の比を求める。
5. 必要なら整数比に直す。

長さが与えられたら比に直す**長さそのものではなく比を使う**

たとえば、

$$BD = 8, \quad DC = 4$$

なら、

$$\frac{BD}{DC} = 2$$

です。

また、

$$CE = 9, \quad EA = 6$$

なら、

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

です。

メネラウスの定理では、線分の長さそのものを 3 つ掛けるのではありません。
まず、それぞれの位置で比を作ります。

対応しない線分を組にしない

比を作る組は、

- BD と DC
- CE と EA
- AF と FB

です。

別の辺にある線分どうしを組み合わせないようにします。

3 点が一直線上か判定する**3 つの比の積を調べる**

点 D, E, F の位置と辺の分け方が与えられたときは、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$$

を計算します。

積が 1 なら、メネラウスの定理の逆より D, E, F は一直線上にあります。

積が 1 でなければ、3 点は一直線上にはありません。

一直線上かを判定する手順

1. 基本配置に合っているか確認する。
2. 3つの比を正しい向きで書く。
3. 積を計算する。
4. 1になるか確認する。

チェバの定理と混同しない

見た目が似ていても配置が違う

チェバの定理とメネラウスの定理には、どちらも3つの比の積が1になる形が現れます。しかし、調べている図形の条件が違います。

チェバの定理

三角形の3頂点から対辺へ引いた3本の線分が1点で交わる条件を調べます。

メネラウスの定理

三角形の3辺またはその延長上にある3点が一直線上になる条件を調べます。式を見る前に、問題文の「1点で交わる」と「一直線上」を見分けます。

この講では基本配置に限定する

メネラウスの定理には、辺の延長上の点の位置が異なる配置や、符号付き線分を利用する表し方もあります。

この講では入門として、点 F を AB の A 側の延長上に置く基本配置に統一して扱います。

例題

例題 1

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

のとき、 $AF : FB$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

メネラウスの定理より、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

したがって、

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

よって、

$$3 \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

なので、

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 1 : 3$$

です。

例題 2

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあります。

$$BD : DC = 3 : 2$$

$$CE : EA = 4 : 3$$

$$AF : FB = 1 : 2$$

です。

D, E, F は一直線上にあるか答えなさい。

例題 2 の解答・解説

3つの比の積を計算すると、

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

です。

したがって、メネラウスの定理の逆より、 D, E, F は一直線上にあります。

例題 3

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD = 8, \quad DC = 4$$

$$CE = 9, \quad EA = 6$$

$$AF = 4$$

のとき、 FB と AB を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

まず、

$$\frac{BD}{DC} = 2$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

です。

メネラウスの定理より、

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{FB} = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{12}{FB} = 1$$

なので、

$$FB = 12$$

です。

点の並びは $F - A - B$ なので、

$$FB = FA + AB$$

です。

よって、

$$AB = 12 - 4 = 8$$

です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD : DC = 3 : 2$$

$$CE : EA = 4 : 3$$

のとき、 $AF : FB$ を求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$AF : FB = 1 : 4$$

のとき、 $CE : EA$ を求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあります。

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$CE : EA = 3 : 4$$

$$AF : FB = 2 : 3$$

のとき、 D, E, F は一直線上にあるか答えなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあります。

$$BD : DC = 3 : 2$$

$$CE : EA = 2 : 3$$

$$AF : FB = 1 : 3$$

のとき、 D, E, F は一直線上にあるか答えなさい。

練習問題 5

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD = 6, \quad DC = 3$$

$$CE = 8, \quad EA = 4$$

$$FB = 20$$

のとき、 AF と AB を求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

また、

$$AB = 8$$

です。

AF と FB を求めなさい。

練習問題 7

ある生徒は、メネラウスの定理を

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

と書きました。

この式の問題点を説明し、この講で使う基本形を正しく書きなさい。

練習問題 8

三角形 ABC で、 D は辺 BC 上、 E は辺 CA 上、 F は辺 AB の A 側の延長上にあり、 D, E, F は一直線上にあります。

AD は $\angle A$ の二等分線で、

$$AB : AC = 2 : 3$$

です。

また、

$$CE : EA = 3 : 1$$

です。

$AF : FB$ を求めなさい。

練習問題 9

次の 2 つの状況について、チェバの定理とメネラウスの定理のどちらを使う場面か答えなさい。

(1) 三角形の 3 頂点から引いた 3 本の線分が 1 点で交わる条件を調べる。

(2) 三角形の 3 辺またはその延長上にある 3 点が一直線上にある条件を調べる。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

メネラウスの定理より、

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

最初の 2 つの積は 2 なので、

$$2 \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$$

より、

$$AF : FB = 1 : 2$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

メネラウスの定理より、

$$2 \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

です。

$\frac{CE}{EA} = x$ とすると、

$$\frac{x}{2} = 1$$

です。

したがって、

$$x = 2$$

なので、

$$CE : EA = 2 : 1$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

3つの比の積は、

$$2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

です。

したがって、メネラウスの定理の逆より、 D, E, F は一直線上にあります。

練習問題 4 の解答・解説

3つの比の積は、

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

です。

積は1ではありません。

したがって、 D, E, F は一直線上にはありません。

練習問題 5 の解答・解説

まず、

$$\frac{BD}{DC} = 2$$

$$\frac{CE}{EA} = 2$$

です。

メネラウスの定理より、

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{AF}{20} = 1$$

です。

したがって、

$$AF = 5$$

です。

点の並びは $F - A - B$ なので、

$$AB = FB - AF = 20 - 5 = 15$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

メネラウスの定理より、

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

なので、

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

です。

点の並びは $F - A - B$ なので、

$$FB = AF + AB$$

です。

$AF = x$ とすると、

$$\frac{x}{x+8} = \frac{1}{3}$$

です。

したがって、

$$3x = x + 8$$

より、

$$AF = 4$$

です。

よって、

$$FB = 12$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

真ん中の比だけが逆向きになっています。

この講の基本配置では、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$$

の向きでそろえます。

したがって、基本形は、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

AD は $\angle A$ の二等分線なので、角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 3$$

です。

メネラウスの定理より、

$$\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

最初の 2 つの積は 2 なので、

$$2 \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 1 : 2$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 3 本の線分が 1 点で交わる条件を調べるので、チェバの定理を使う場面です。

(2) 3 点が一直線上にある条件を調べるので、メネラウスの定理を使う場面です。