第 048 講 重力の位置エネルギーと脱出

この講でできるようになること

- 万有引力による位置エネルギーの基準と負の符号の意味を説明できる。
- 天体中心からの距離を使って位置エネルギーの変化と重力の仕事を求められる。
- 地表付近の mgh と、広い範囲で使う重力の位置エネルギーを使い分けられる。
- 力学的エネルギーの符号から束縛と脱出を判断し、脱出に必要な最小初速や最大到達距離を求められる。

1. 天体から遠ざかるのに必要なエネルギー

地表から物体を上向きに投げると、物体は上昇するにつれて速さを失う。これは、上昇中の物体に働く重力が、運動の向きとは反対向きに仕事をするためである。

では、物体を十分に速く投げれば、地表へ戻らずに遠くまで進み続けることはできるだろうか。

地表付近では、重力による位置エネルギーの変化を mgh で表してきた。しかし、天体から非常に遠い場所まで考える場合には、重力の大きさが距離によって変わるため、一定の重力加速度を用いる mgh をそのまま使うことはできない。

そこで本講では、**無限に遠い場所を位置エネルギーの基準にし、運動エネルギーと合わせて脱出を判断する**。

考える物理モデル

質量 M、半径 R の球対称な天体と、質量 m の小さな物体を考える。物体の質量は天体に比べて十分小さく、$m \ll M$ とする。

天体の中心をほぼ静止とみなせる慣性系を用い、次の条件を固定する。

- 物体は天体の外部 $r \geq R$ で運動する。
- 物体には万有引力だけが働く。打上げ後の推進、大気抵抗、他天体からの引力は考えない。
- 天体の自転は無視する。
- 天体内部の重力は扱わない。

天体の中心から物体までの距離を r、地表からの高度を h とすると、両者の関係は

$$r = R + h$$

である。高度 h と中心からの距離 r を混同しないことが重要である。

万有引力定数を G とすると、物体に働く万有引力の大きさは

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

であり、向きは天体の中心へ向かう方向である。

計算を見やすくするため、

$$\mu = GM$$

とおく。μ の単位は $\mathrm{m^3/s^2}$ であり、物体の質量 m とは別の量である。

以降の数値例では、特に断らない限り、次の架空のモデル天体を使用する。地球の実測値ではない。

物理量	設定値
天体の重力パラメータ $\mu = GM$	$4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$
天体の半径 R	$1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$
物体の質量 m	$1.0\,\mathrm{kg}$

この天体の地表での重力加速度の大きさは

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{\mu}{R^2} \\ &= \frac{4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}}{(1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 4.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

2. 無限遠を基準にした重力の位置エネルギー

位置エネルギーを考えるには、まず基準となる場所を決める必要がある。

天体から遠ざかるほど万有引力は弱くなり、中心からの距離 r を限りなく大きくすると、引力の大きさは 0 に近づく。

本講では、**無限遠で重力の位置エネルギーを 0 とする**。無限遠とは、中心からの距離 r を限りなく大きくして考える極限であり、有限の距離にある特定の地点ではない。

無限遠を基準にした重力の位置エネルギー

天体の外部にある質量 m の物体の重力による位置エネルギー U は、無限遠を $U = 0$ とすると

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\mu m}{r}$$

で表される。

$M > 0$、$m > 0$、有限の $r \geq R$ では必ず $U < 0$ となる。r が大きくなるほど U は増加し、無限遠で 0 に近づく。

なぜ位置エネルギーが負になるのか

地表から物体を遠ざけるとき、重力は移動を妨げる向きに働く。そのため、物体をゆっくり遠くへ運ぶには、外から正の仕事を与える必要がある。

無限遠での位置エネルギーを 0 と決めたので、それより内側の位置エネルギーは負になる。

ここでいう「負」は、選んだ基準より位置エネルギーが低いことを表す。エネルギーが存在しない、運動エネルギーが負になる、あるいは重力が反発力になるという意味ではない。

同じ中心距離 r なら、物体の質量 m が大きいほど U はより負になり、その絶対値は大きくなる。また、力の大きさは $\frac{1}{r^2}$、位置エネルギーの絶対値は $\frac{1}{r}$ に比例する。両者を混同しない。

位置エネルギーの値を数直線で読む

モデル天体の地表 $r = R$ と、その 2 倍の中心距離 $r = 2R$ を比べる。

$$U(R) = -\frac{(4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(1.0\,\mathrm{kg})}{1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m}}$$
$$= -4.0 \times 10^{7}\,\mathrm{J}$$

同様に、

$$U(2R) = -2.0 \times 10^{7}\,\mathrm{J}$$

となる。



図 1　位置エネルギー U の数直線。1 目盛は 10^7J に対応。横方向は空間距離ではない。有限 r で U は負、無限遠へ近づくと 0 へ近づく。

この数直線の -4、-2、0 は、それぞれ $-4.0 \times 10^{7}\,\mathrm{J}$、$-2.0 \times 10^{7}\,\mathrm{J}$、$0\,\mathrm{J}$ に対応する。

地表から $2R$ へ移ると、位置エネルギーは負のまま増加する。無限遠の 0 は、有限の距離では到達しない極限値であるため、白丸で示している。

数直線はエネルギーの値を比較する図であり、天体からの距離を表す空間図でも、U と r の関係を表す曲線でもない。

3. 位置エネルギーの変化と重力の仕事

物体が中心距離 r_1 から r_2 へ移るときの位置エネルギーの変化を考える。

変化量は「後の値−初めの値」であるから、

$$\Delta U = U(r_2) - U(r_1)$$
$$= -\frac{\mu m}{r_2} + \frac{\mu m}{r_1}$$
$$= \mu m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

となる。

位置エネルギーの変化と、重力が物体にする仕事 W_{g} の関係は

$$W_{\mathrm{g}} = -\Delta U$$

である。

移動の向き	位置エネルギーの変化	重力の仕事
外向き $r_2 > r_1$	$\Delta U > 0$	$W_{\mathrm{g}} < 0$
内向き $r_2 < r_1$	$\Delta U < 0$	$W_{\mathrm{g}} > 0$

外向きの移動では、重力は物体の運動に逆らう向きに仕事をする。一方、内向きの移動では、重力が物体の運動を助ける向きに仕事をする。

仕事の主体を区別する

重力がする仕事は $W_{\mathrm{g}} = -\Delta U$ である。

物体を外力で非常にゆっくり移し、初めと終わりの運動エネルギーの差を無視できる場合は、外力の仕事が $W_{\mathrm{ext}} \approx +\Delta U$ となる。

しかし、物体が加速する場合には外力の仕事の一部が運動エネルギーの変化にも対応するため、いつでも $W_{\mathrm{ext}} = \Delta U$ としてよいわけではない。

例題 1

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体を中心距離 $2R$ の地点まで移す。

(1) 地表と中心距離 $2R$ における重力の位置エネルギーを求めよ。

(2) 位置エネルギーの変化 ΔU を求めよ。

(3) この移動で重力がする仕事を求めよ。

解答・解説 (1) 無限遠を $U = 0$ とする。地表では $r = R$、移動後は $r = 2R$ である。

$$U(R) = -\frac{\mu m}{R} = -4.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}$$

$$U(2R) = -\frac{\mu m}{2R} = -2.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}$$

(2) 位置エネルギーの変化は、移動後から移動前を引く。

$$\Delta U = \left(-2.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}\right) - \left(-4.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}\right)$$

$$= +2.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}$$

(3) 重力がする仕事は位置エネルギーの変化と反対符号になる。

$$W_{\mathrm{g}} = -\Delta U$$

$$= -2.0 \times 10^{7}\ \mathrm{J}$$

物体が外向きに移動するため、重力の仕事は負である。位置エネルギーが増えたことと、重力が負の仕事をしたことは矛盾しない。

4. 地表付近の mgh との使い分け

地表から高さ h の場所では、天体中心からの距離は $R + h$ である。

無限遠基準の位置エネルギーは

$$U(R+h) = -\frac{\mu m}{R+h}$$

となる。

地表の位置エネルギーとの差を求めると、

$$\begin{aligned}\Delta U &= U(R+h) - U(R) \\ &= \mu m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) \\ &= \frac{\mu m h}{R(R+h)}\end{aligned}$$

である。

ここで、高度 h が天体半径 R に比べて十分小さい、すなわち $h \ll R$ の場合を考える。

このとき $R+h \approx R$ とみなせるため、

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{\mu m h}{R(R+h)} \\ &\approx \frac{\mu m h}{R^2} \\ &= m g_0 h\end{aligned}$$

となる。ただし、$g_0 = \frac{\mu}{R^2}$ は地表での重力加速度の大きさである。

つまり、これまで用いてきた mgh は、重力の位置エネルギーの**地表付近での変化量を近似した式**なのである。

基準の違いに注意する

次の二つは、表している量の基準が異なる。

式	基準と意味
$U(r) = -\mu\frac{m}{r}$	無限遠を 0 とした位置エネルギーそのもの
$\Delta U \approx m g_0 h$	地表から小高度 h までの位置エネルギーの増加の近似

地表を基準として位置エネルギーを 0 と置くことはできるが、それは無限遠を 0 とする基準とは異なる。両方の場所を同時に $U=0$ として同じ式に代入してはならない。

例題 2

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体をゆっくり高さ h まで移す。始めと終わりの速さは無視できるほど小さいものとする。

(1) $h = 1000\,\mathrm{m}$ のとき、位置エネルギーの増加を正確な式から求めよ。

(2) 同じ高さについて、mg_0h で近似した値を求め、正確な値と比較せよ。

(3) $h = R$ の場合に、正確な式と mg_0h の結果を比較し、近似の妥当性を判断せよ。

解答・解説 (1) 高度 h における中心距離は $R + h$ である。正確な変化量は

$$\Delta U = \frac{\mu m h}{R(R+h)}$$

である。設定値を代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{(4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(1.0\,\mathrm{kg})(1000\,\mathrm{m})}{(1.0\times10^{7}\,\mathrm{m})(10001000\,\mathrm{m})}\\ &\approx 3999.60004\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

(2) 地表での重力加速度 $g_0 = 4.0\,\mathrm{m/s^2}$ を使うと、

$$\begin{aligned}mg_0h &= (1.0\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s^2})(1000\,\mathrm{m})\\ &= 4000\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。正確な値との差は約 $0.400\,\mathrm{J}$ であり、正確な値に対する相対的な過大差は約 0.0100% である。

これは $1000\,\mathrm{m}$ が天体半径 $1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$ に比べて十分小さいためである。

(3) $h = R$ なら、移動後の中心距離は $2R$ である。正確な式では、

$$\begin{aligned}\Delta U &= \mu m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right)\\ &= \frac{\mu m}{2R}\\ &= 2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

一方、一定の g_0 を用いると、

$$\begin{aligned}mg_0R &= (1.0\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s^2})(1.0\times10^{7}\,\mathrm{m})\\ &= 4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となり、正確な値の 2 倍である。

$h = R$ は $h \ll R$ を満たさないため、mg_0h の近似は適切ではない。遠くまで移動する場合は、中心距離に応じて変化する重力を考慮した式を使う必要がある。

5. 全力学的エネルギーの符号で脱出を判断する

ここからは、物体を外向きに打ち上げた後、万有引力だけを受けて運動する場合を考える。

物体の運動エネルギーを K、重力による位置エネルギーを U とする。

物体に重力以外の仕事が加わらないので、力学的エネルギー E は保存する。

重力場での力学的エネルギー

物体の速さを v とすると、万有引力だけが働く運動では

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r}$$

が一定である。

運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ であり、負になることはない。

無限遠に近づくと $U \to 0$ となる。このとき、保存される E の符号によって、脱出できるかどうかを判断できる。

力学的エネルギーが負の場合

もし $E < 0$ のまま無限遠に近づけるとすると、$U \to 0$ だから $K \to E < 0$ が必要になる。

しかし、運動エネルギーは負にならないため、これは不可能である。

したがって、$E < 0$ の物体は無限遠へ脱出できず、重力的に束縛された状態である。ただし、束縛されることは、必ず衝突せずに軌道を回り続けることと同じではない。天体表面に衝突する場合もある。

力学的エネルギーが零の場合

$E = 0$ なら、無限遠に近づくにつれて $U \to 0$ となり、$K \to 0$ となる。

物体は、無限遠へ限りなく近づく極限で速さが 0 に近づく。これは**脱出できるかどうかの境界条件**である。

無限遠は極限であり、有限時間で無限遠の地点に到着したという意味ではない。

力学的エネルギーが正の場合

$E > 0$ なら、無限遠へ近づいて位置エネルギーが 0 になっても、正の運動エネルギーが残る。

無限遠での速さの極限を v_∞ とすると、

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

となる。

全エネルギーの数直線

先ほどの位置エネルギー U の数直線と区別して、今度は全力学的エネルギー $E = K + U$ の値を比較する。



図 2　全力学的エネルギー E の数直線。1 目盛は 10^7J に対応。外向き半径運動のモデルで E 負は脱出不可、E0 は無限遠で速さ 0 の境界、E 正は無限遠でも速さが残る。

数直線上の -2、0、$+2$ は、それぞれ -2.0×10^7 J、0 J、$+2.0 \times 10^7$ J に対応する。

この数直線の 0 は実現可能な脱出境界のエネルギーであり、黒丸で示している。先ほどの U の数直線では、有限距離で到達しない極限値 0 を白丸にした。**同じ 0 でも、比較している物理量と意味が異なる**のである。

エネルギーの条件と実際の軌道

以下で脱出を扱うときは、天体表面から外向きの半径方向に打ち上げ、衝突せずに運動する場合を基本とする。

$E \geq 0$ は、衝突しない自由運動で無限遠へ進むことが可能なエネルギー条件である。しかし、例えば物体を天体内部へ向けて投げれば、$E \geq 0$ でも表面へ衝突し得る。エネルギーの符号だけで衝突の有無まで判断してはならない。

6. 脱出に必要な最小初速

物体を中心距離 r_0 の地点から外向きに打ち上げる。打上げ時の速さを v_0 とする。

脱出できる最小の初速は、全力学的エネルギーがちょうど $E = 0$ となる速さである。

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mu m}{r_0}$$

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$$

したがって、

脱出速度

中心距離 r_0 から、打上げ後に推進せず、天体に衝突しないで脱出するための最小初速は

$$v_{\mathrm{esc}}(r_0)=\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}=\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$$

である。

地表から打ち上げる場合は $r_0=R$ とする。

この式には打ち上げる物体の質量 m が残らない。位置エネルギーも運動エネルギーも m に比例するため、境界条件を求める過程で質量が消えるのである。

ただし、位置エネルギーや必要な運動エネルギーの量そのものは、物体の質量によって変わる。

また、ここで求めるのは、**打上げた後に推進を行わない物体の脱出速度**である。燃料を燃やし続けて質量や速度を変化させる実際のロケットに、そのまま要求速度として当てはめるものではない。

例題 3

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体を外向きの半径方向に打ち上げる。打上げ後は万有引力だけが働く。

(1) 地表から脱出できる最小初速を求めよ。

(2) 最小初速で打ち上げたときの初期運動エネルギーと全力学的エネルギーを求めよ。

(3) この物体の速さが、無限遠へ近づく極限でどうなるか説明せよ。

解答・解説 (1) 地表からの脱出速度は

$$v_{\mathrm{esc}}=\sqrt{\frac{2\mu}{R}}$$

である。設定値を代入すると、

$$\begin{aligned}v_{\mathrm{esc}}&=\sqrt{\frac{2(4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})}{1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}}}\\&=\sqrt{8.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}}\\&=4000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}\\&\approx 8944.27\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

(2) 最小初速に対応する運動エネルギーは

$$K_0 = \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(8.0\times10^7\,\mathrm{m^2/s^2})$$
$$= 4.0\times10^7\,\mathrm{J}$$

である。

地表の位置エネルギーは $U(R) = -4.0\times10^7\,\mathrm{J}$ であるから、

$$E = K_0 + U(R)$$
$$= (4.0\times10^7\,\mathrm{J}) + (-4.0\times10^7\,\mathrm{J})$$
$$= 0\,\mathrm{J}$$

となる。

(3) 全力学的エネルギーが 0 なので、無限遠へ近づくにつれて $U\to0$、$K\to0$ となり、速さも 0 に近づく。

物体は有限の距離では運動を続けており、有限時間で無限遠に到着して静止するという意味ではない。

7. 脱出できない場合の最大到達距離

外向きに投げた物体の初期エネルギーが負の場合、物体は無限遠へ脱出できない。

ここでは、天体中心から外向きに進む**半径方向の運動**だけを考える。打上げ後は重力だけが働き、最大到達距離に達するまで天体表面に衝突しないものとする。

外向きに上昇するにつれて物体の速さは小さくなり、最も遠くまで進んだ位置で一瞬速さが 0 になる。

その中心距離を $r_{\max}$ とすると、

$$E = K + U$$
$$= 0 - \frac{\mu m}{r_{\max}}$$
$$= -\frac{\mu m}{r_{\max}}$$

である。

したがって、$E<0$ であることを用いると、

$$r_{\max} = \frac{\mu m}{|\,E\,|}$$

と求められる。

地表からの最大高度 $h_{\max}$ は、

$$h_{\max} = r_{\max} - R$$

である。

最大距離で速さが 0 となる条件

最大距離で $v=0$ とできるのは、ここで扱う外向き半径方向の運動である。

半径方向以外の速度成分を持つ軌道では、天体から最も遠い地点でも横向きの速度が残り得る。したがって、任意の楕円軌道について最遠点の全速さを 0 としてはならない。

例題 4

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体を、初速 $6000\,\mathrm{m/s}$ で外向きの半径方向に打ち上げる。打上げ後は万有引力だけが働く。

(1) 初期運動エネルギーと全力学的エネルギーを求めよ。

(2) 物体が無限遠まで脱出できるか判断せよ。

(3) 最大到達中心距離 $r_{\max}$ と、地表からの最大高度 $h_{\max}$ を求めよ。

解答・解説 (1) 初期運動エネルギーは

$$K_0=\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(6000\,\mathrm{m/s})^2$$

$$=1.8\times10^{7}\,\mathrm{J}$$

である。地表での位置エネルギーは $-4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$ なので、

$$E=\left(1.8\times10^{7}\,\mathrm{J}\right)-\left(4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\right)$$

$$=-2.2\times10^{7}\,\mathrm{J}$$

となる。

(2) $E<0$ であるため、物体は無限遠まで脱出できない。

(3) 最大到達中心距離では半径方向の速さが 0 になる。

$$
\begin{aligned}
r_{\max} &= \frac{\mu m}{|\,E\,|} \\
&= \frac{(4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(1.0\,\mathrm{kg})}{2.2\times10^{7}\,\mathrm{J}} \\
&= \frac{200}{11}\times10^{6}\,\mathrm{m} \\
&\approx 1.81818\times10^{7}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

となる。

最大高度は中心距離から天体半径を引くので、

$$
\begin{aligned}
h_{\max} &= r_{\max} - R \\
&= \left(\frac{200}{11}\times10^{6} - 1.0\times10^{7}\right)\mathrm{m} \\
&= \frac{90}{11}\times10^{6}\,\mathrm{m} \\
&\approx 8.18182\times10^{6}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

である。

中心距離 $r_{\max}$ と、地表から測った高さ $h_{\max}$ は異なる量である。答えるべき量を設問で確認する必要がある。

8. 脱出後にも速さが残る場合

脱出速度を上回る速さで外向きに打ち上げると、初期の全力学的エネルギーは正になる。

無限遠へ近づくと重力の位置エネルギーは 0 に近づくため、余った正のエネルギーが運動エネルギーとして残る。

初期状態と無限遠の極限を比較すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0} &= \frac{1}{2}mv_\infty^2 \\
v_\infty^2 &= v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}
\end{aligned}
$$

である。

初速のすべてが無限遠でも残るわけではない。物体は外向きに移動する間、重力によって運動エネルギーを失い、その分だけ位置エネルギーが増加する。

例題 5

モデル天体の地表から、質量 1.0 kg の物体を初速 10000 m/s で外向きの半径方向に打ち上げる。打上げ後は万有引力だけが働く。

(1) 初期運動エネルギーと全力学的エネルギーを求めよ。

(2) 脱出できるか判断せよ。

(3) 無限遠に近づく極限での速さを求めよ。

解答・解説 (1) 初期運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(10000\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 5.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、全力学的エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= K_0 + U(R) \\ &= \left(5.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\right) - \left(4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\right) \\ &= +1.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

(2) $E>0$ であり、外向き半径方向の運動なので、無限遠へ脱出できる。

(3) 無限遠での速さの極限は、

$$\begin{aligned} v_\infty &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1.0\times10^{7}\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{2.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ &= 2000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 4472.14\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

打上げ時の $10000\,\mathrm{m/s}$ がそのまま残るのではない。速さは小さくなるが、無限遠に近づく極限でも正の速さが残るのである。

演習問題

以下の演習では、特に断らない限り、本講のモデル天体

$$\mu = 4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2},\qquad R = 1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$$

を使用する。物体は天体外部で運動し、打上げ後は万有引力だけが働くものとする。位置エネルギーは無限遠を 0 とし、外向き半径方向の運動を指定した設問では、天体に衝突しない運動を考える。

演習 1

重力の位置エネルギーと仕事の関係を考える。物体の質量を m、天体中心からの距離を r とする。

演習 1(1) 無限遠を基準にした重力の位置エネルギー $U(r)$ の式を示し、有限の $r \geq R$ で負になる意味を説明せよ。

演習 1(2) 質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体が中心距離 $2R$ から $3R$ へ移動するとき、位置エネルギーの変化と重力の仕事の符号をそれぞれ答えよ。理由も説明せよ。

演習 1(3) 同じ位置 r にある物体の質量だけを m から $2m$ に変える。位置エネルギーの値とその絶対値がどう変わるか答えよ。

演習 1(4) 「万有引力の大きさが $\frac{1}{r^2}$ に比例するので、無限遠基準の重力の位置エネルギーも $\frac{1}{r^2}$ に比例する」という説明が正しいか判断し、理由を述べよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」。

演習 2

モデル天体の中心距離 $r_0 = 2R$ の地点から、物体を外向きの半径方向に打ち上げる。

演習 2(1) $r_0 = 2R$ から脱出するための最小初速を求め、地表からの脱出速度との比を求めよ。

演習 2(2) 物体の質量を $5.0\,\mathrm{kg}$ とした場合、初期位置エネルギーと脱出に必要な最小初期運動エネルギーを求めよ。

演習 2(3) 演習 2(2)の物体の脱出速度を求め、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体の場合と比べて説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」。

演習 3

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体を、初速 $2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$ で外向きの半径方向に打ち上げる。

演習 3(1) 初期運動エネルギーと全力学的エネルギーを求めよ。

演習 3(2) この物体が脱出できるか判断し、全力学的エネルギーを根拠として説明せよ。

演習 3(3) 最大到達中心距離と、地表からの最大高度を求めよ。

演習 3(4) 最も遠くまで進んだ地点で物体の速さを 0 としてよい理由を、運動の条件に触れて説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」。

©ミライコーチング

演習 4

モデル天体の地表から、質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体を、初速 $4000\sqrt{\frac{15}{2}}\,\mathrm{m/s}$ で外向きの半径方向に打ち上げる。

演習 4(1) 初速を小数で近似し、初期運動エネルギーを求めよ。

演習 4(2) 全力学的エネルギーを求め、脱出できるか判断せよ。

演習 4(3) 無限遠に近づく極限での速さを求めよ。

演習 4(4) 無限遠に近づくにつれて速さが小さくなるのに、全力学的エネルギーが保存する理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」。

演習 5

無限遠基準の位置エネルギーと脱出条件について、次の問いに答えよ。

演習 5(1) 天体の地表で速さが 0 の質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体について、K、U、E を求めよ。ただし、この時点では物体が地面に置かれ、支持されているものとする。

演習 5(2) 地表で速さ 0 の物体が、重力だけを受けて地表上空に静止し続けると考えてよいか。支持力と重力の違いに触れて説明せよ。

演習 5(3) 地表から外向きの半径方向へ打ち上げ、打上げ後に万有引力だけを受ける物体が $E=0$ の場合、無限遠での速さの極限を答えよ。また、「有限時間で無限遠に到着する」という説明が正しいか判断せよ。

演習 5(4) 地表付近から、全力学的エネルギーが正となる大きな初速で、物体を天体中心へ向けて投げた場合を考える。「$E>0$ だから必ず衝突せずに脱出する」と言えるか。理由を説明せよ。

演習 5(5) 天体から非常に遠く離れた位置において、重力の位置エネルギーを mg_0h で計算することが適切か判断し、式の成立条件と位置エネルギーの基準に触れて説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 無限遠を基準とする重力の位置エネルギーは、

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}=-\frac{\mu m}{r}$$

である。

有限の $r\geq R$ では $U<0$ となる。負号は、無限遠における $U=0$ よりも低い位置エネルギーであることを示す。

重力による位置エネルギーが負であることは、エネルギーそのものが存在しないことや、重力が反発力であることを意味しない。

演習 1(2) 中心距離 $2R$ から $3R$ への移動では、位置エネルギーの変化は正、重力の仕事は負である。

外向きの移動なので、$r_2 > r_1$ である。位置エネルギー変化の式から、

$$\Delta U = \mu m\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)$$
$$= \frac{\mu m}{6R} > 0$$

となる。

重力の仕事は、

$$W_{\mathrm{g}} = -\Delta U < 0$$

である。

重力は天体中心へ向かうため、外向きの移動に対して負の仕事をする。

演習 1(3) 位置エネルギーは、負の値として 2 倍になり、絶対値も 2 倍になる。

元の位置エネルギーを U_m とすると、

$$U_m = -\frac{\mu m}{r}$$

である。質量を $2m$ に変えると、

$$U_{2m} = -\frac{\mu (2m)}{r}$$
$$= 2U_m$$

となる。

例えば、元の値が $-10\,\mathrm{J}$ なら、新しい値は $-20\,\mathrm{J}$ である。負の値としては小さくなるが、絶対値は大きくなる。

演習 1(4) この説明は誤りである。

万有引力の大きさは、

$$F = \frac{\mu m}{r^2}$$

であり、中心距離の 2 乗に反比例する。

一方、無限遠を基準にした位置エネルギーは、

$$U = -\frac{\mu m}{r}$$

であり、中心距離の 1 乗に反比例する負の量である。

力と位置エネルギーは異なる物理量であり、距離に対する依存の仕方も異なる。公式の分母にある r の指数をそのまま同じにしてはならない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) 中心距離 $2R$ からの脱出速度は、

$$v_{\mathrm{esc}}(2R) = 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \approx 6324.56\,\mathrm{m/s}$$

であり、地表からの脱出速度の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍である。

脱出速度の式へ $r_0 = 2R$ を代入する。

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{esc}}(2R) &= \sqrt{\frac{2\mu}{2R}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{R}} \\ &= \sqrt{4.0 \times 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ &= 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

地表からの脱出速度は、

$$v_{\mathrm{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$$

であるから、比は、

$$\begin{aligned} \frac{v_{\mathrm{esc}}(2R)}{v_{\mathrm{esc}}(R)} &= \sqrt{\frac{\frac{\mu}{R}}{2\frac{\mu}{R}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

演習 2(2) 質量 $5.0\,\mathrm{kg}$ の物体では、初期位置エネルギーが $-1.0 \times 10^8\,\mathrm{J}$、最小初期運動エネルギーが $+1.0 \times 10^8\,\mathrm{J}$ となる。

中心距離 $2R$ における位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U(2R) &= -\frac{\mu m}{2R} \\ &= -\frac{(4.0 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(5.0\,\mathrm{kg})}{2.0 \times 10^7\,\mathrm{m}} \\ &= -1.0 \times 10^8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

最小初速で脱出する境界では $E = 0$ なので、

$$\begin{aligned} K_{\min} + U(2R) &= 0 \\ K_{\min} &= -U(2R) \\ &= 1.0 \times 10^8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

演習 2(3) 脱出速度は質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の場合と同じ、

$$v_{\mathrm{esc}}(2R) = 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \approx 6324.56\,\mathrm{m/s}$$

である。

確認のため、質量 $5.0\,\mathrm{kg}$ の物体について運動エネルギーから求めると、

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{esc}} &= \sqrt{\frac{2K_{\min}}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1.0\times10^{8}\,\mathrm{J})}{5.0\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{4.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ &= 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

質量が大きいほど必要な運動エネルギーは大きくなるが、脱出速度の式では質量が消える。これは異なる質量の物体をそれぞれ打ち上げる比較であり、一つの物体が飛行中に燃料を消費して質量を変える状況ではない。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) 初期運動エネルギーは $2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$、全力学的エネルギーは $-2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$ である。

初速は $2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$ なので、その 2 乗は $4.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}$ である。

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(4.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}) \\ &= 2.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

地表の位置エネルギーは $-4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$ なので、

$$\begin{aligned} E &= \bigl(2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\bigr) - \bigl(4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\bigr) \\ &= -2.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

演習 3(2) 全力学的エネルギーが負なので、無限遠へ脱出できない。

仮に無限遠まで進めるとすると、位置エネルギーが 0 に近づいたとき、負の運動エネルギーが必要になる。しかし、運動エネルギーは負にならないため、脱出は不可能である。

演習 3(3) 最大到達中心距離は $2R = 2.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$、最大高度は $R = 1.0\times10^{7}\,\mathrm{m}$ である。

外向き半径方向の運動なので、最大到達距離では速さが 0 となる。

$$E = -\frac{\mu m}{r_{\max}}$$

$$r_{\max} = \frac{\mu m}{|\,E\,|}$$

より、

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{(4.0\times10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2})(1.0\,\mathrm{kg})}{2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}} \\ &= 2.0\times10^{7}\,\mathrm{m} \\ &= 2R \end{aligned}$$

となる。

地表からの高度は、

$$\begin{aligned} h_{\max} &= r_{\max} - R \\ &= \left(2.0\times10^{7} - 1.0\times10^{7}\right)\mathrm{m} \\ &= 1.0\times10^{7}\,\mathrm{m} \\ &= R \end{aligned}$$

である。

演習 3(4) 物体が外向きの半径方向にだけ進み、上昇中は重力によって速さが減少するためである。

この運動では横向きの速度成分がなく、最も遠い位置で外向きの速度が一度 0 になり、その後、内向きへ運動を変える。

したがって、最大到達地点で全速さを 0 としてよい。

一方、半径方向以外の軌道では、最遠点でも接線方向の速度が残り得る。そのような運動へ今回の条件を無条件に拡張することはできない。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 初速は約 10954.45 m/s、初期運動エネルギーは 6.0×10^{7} J である。

初速は、

$$\begin{aligned} v_0 &= 4000\sqrt{\frac{15}{2}}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 10954.45\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

初期運動エネルギーは、先に初速の 2 乗を用いると求めやすい。

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})\left(4000\sqrt{\frac{15}{2}}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})(1.2\times10^{8}\,\mathrm{m^2/s^2}) \\ &= 6.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

演習 4(2) 全力学的エネルギーは $+2.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$ であり、脱出できる。

地表での位置エネルギーは $-4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}$ であるから、

$$\begin{aligned} E &= \left(6.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\right) - \left(4.0\times10^{7}\,\mathrm{J}\right) \\ &= +2.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

$E>0$ で、外向き半径方向の非衝突運動であるため、無限遠へ脱出できる。

演習 4(3) 無限遠に近づく極限での速さは、

$$v_\infty = 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \approx 6324.56\,\mathrm{m/s}$$

である。

無限遠では位置エネルギーが 0 に近づくため、

$$\begin{aligned} v_\infty &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2(2.0\times10^{7}\,\mathrm{J})}{1.0\,\mathrm{kg}}} \\ &= \sqrt{4.0\times10^{7}\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ &= 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

演習 4(4) 運動エネルギーが減少した分、重力の位置エネルギーが増加するため、両者の和は一定に保たれる。

初期状態では、

$$\begin{aligned} K_0 &= 6.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \\ U_0 &= -4.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \\ E &= 2.0\times10^{7}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

無限遠へ近づく極限では、

$$K_\infty \to 2.0 \times 10^7\,\mathrm{J}$$
$$U_\infty \to 0\,\mathrm{J}$$
$$E = 2.0 \times 10^7\,\mathrm{J}$$

となる。

運動エネルギーは $4.0 \times 10^7\,\mathrm{J}$ 減少し、位置エネルギーは同じだけ増加している。

そのため、速さは小さくなっても、全力学的エネルギーは保存する。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 地表で速さが 0 の質量 $1.0\,\mathrm{kg}$ の物体は、運動エネルギーが $0\,\mathrm{J}$、位置エネルギーと全力学的エネルギーがともに $-4.0 \times 10^7\,\mathrm{J}$ である。

速さが 0 なので、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0\,\mathrm{J}$$

となる。

地表では $r = R$ であるから、

$$\begin{aligned} U(R) &= -\frac{\mu m}{R} \\ &= -4.0 \times 10^7\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= 0\,\mathrm{J} - 4.0 \times 10^7\,\mathrm{J} \\ &= -4.0 \times 10^7\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

演習 5(2) 重力だけを受けて地表上空に静止し続けると考えることはできない。

地面に置かれた物体は、下向きの重力と、地面から受ける上向きの支持力がつり合うことで静止できる。

一方、空中で重力だけを受ける物体には、天体中心へ向かう合力が働く。したがって加速度が生じ、静止し続けることはできない。

地面に支持されている静止状態と、重力だけを受ける自由運動を区別する必要がある。

演習 5(3) $E = 0$ の物体は、無限遠に近づく極限で速さが 0 に近づく。ただし、有限時間で無限遠に到着するという説明は正しくない。

無限遠の極限では $U \to 0$ となるため、保存則から

$$\begin{aligned} K &= E - U \\ &\to 0 \end{aligned}$$

である。

よって、$v \to 0$ となる。

しかし、無限遠とは中心距離を際限なく大きくする極限である。有限距離にある特定の地点ではないため、有限時間でそこへ到着して静止することを意味しない。

演習 5(4) 必ず衝突せずに脱出すると言うことはできない。

$E > 0$ は、無限遠でも正の運動エネルギーが残り得るというエネルギー条件を示す。

しかし、物体を天体中心へ向けて投げれば、物体は天体表面へ衝突し得る。エネルギーが正であることは、天体との衝突が起こらないことを保証しない。

脱出を判断する際には、全力学的エネルギーの符号に加えて、運動の向きや衝突の有無を確認する必要がある。

演習 5(5) 天体から非常に遠く離れた場所までの位置エネルギー変化を、一定の g_0 を使った mg_0h で求めることは適切ではない。

mg_0h は、地表からの高さ h が半径 R に比べて十分小さい $h \ll R$ の条件で、位置エネルギーの変化を近似する式である。

地表から遠ざかると重力加速度の大きさが変わるため、一定の g_0 を使い続けることはできない。

無限遠を基準とした位置エネルギーそのものは、

$$U(r) = -\frac{\mu m}{r}$$

であり、地表から高さ h への正確な位置エネルギー変化は、

$$\Delta U = \frac{\mu m h}{R(R+h)}$$

である。

したがって、広い高度範囲ではこちらを使用する。

また、無限遠を $U = 0$ とする基準では、地表の位置エネルギーは負である。mg_0h を無限遠基準の位置エネルギーそのものと混同してはならない。