

第 25 講 三角比を使って長さ・高さを求める

学習目標

- ・ 求めたい長さを含む直角三角形を見つけられる。
- ・ 分かっている辺と求めたい辺から、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ のどれを使うか判断できる。
- ・ 仰角と水平距離から高さを求められる。
- ・ 斜めの長さや水平距離を、三角比を使って求められる。

実際の長さを「直角三角形」に変える

最初に公式を選ぶのではなく、三角形を探す

建物の高さや坂道の長さのように、直接測りにくい長さでも、直角三角形をつくと三角比を使えることがあります。

たとえば、地面上の点から建物の頂上を見る場面では、

- ・ 地面に沿った水平距離
- ・ 建物の高さ
- ・ 観測点から頂上までの視線

の 3 本で直角三角形を考えられます。

三角比の応用問題では、文章を読んですぐ計算を始めるのではなく、どの 3 本の線が直角三角形をつくるかを見つけることが出発点です。

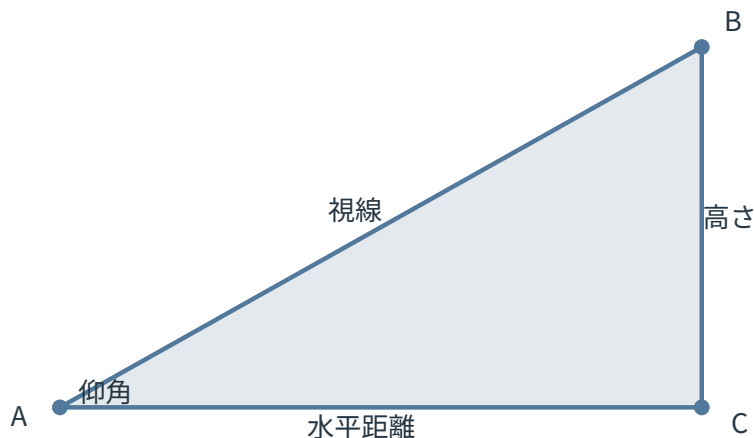


図 1 高さを求めるときに考える直角三角形

仰角

水平な方向から上向きに見上げたとき、水平線と視線の間にできる角を**仰角**といいます。

どの三角比を使うか

分かっている辺と求めたい辺を見る

直角三角形で角を θ とします。

三角比は、

$$\sin \theta = \frac{\text{向かい側の辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{となりの辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{向かい側の辺}}{\text{となりの辺}}$$

でした。

応用問題では、3 つすべてを使うわけではありません。

分かっている辺と求めたい辺の 2 本だけを見ると、使う三角比を選びやすくなります。

三角比の選び方

基準となる角に対して、

- ・ 向かい側と斜辺を使うなら $\sin$
- ・ となりと斜辺を使うなら $\cos$
- ・ 向かい側ととなりを使うなら $\tan$

です。

「何が既知で、何が未知か」を確認してから式をつくります。

辺の役割は角を基準に決まる

同じ直角三角形でも、どの鋭角を基準にするかによって「向かい側」と「となり」の辺は変わります。

問題に示された角を最初に確認し、その角から見た 3 辺の役割を決めてから計算します。

水平距離から高さを求める

高さ と 水平距離 なら 正接 が 直接 つながる

建物から水平に 20 m 離れた点から頂上を見たとき、仰角が 30° だったとします。

建物の高さを h m とすると、角 30° に対して、

- ・ 向かい側の辺が h
- ・ となりの辺が 20

です。

したがって正接を使い、

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{20}$$

と表せます。

$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ なので、

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

です。

高さ と 水平距離 が 関係する 問題では、斜辺が不要なので $\tan$ が使いやすいことがよくあります。

高さを求める基本形

水平距離を d 、仰角を θ 、高さを h とすると、

$$\tan \theta = \frac{h}{d}$$

です。

したがって、 $h = d \tan \theta$ と求められます。

斜めの長さを求める

斜辺が未知なら正弦や余弦を見る

地面と 30° の角をなす斜面があり、その斜面によって高さ 4 m だけ上がるとします。

斜面の長さを x m とすると、 30° に対して高さ 4 m は向かい側、 x m は斜辺です。

したがって、

$$\sin 30^\circ = \frac{4}{x}$$

です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$ となり、 $x = 8$ です。

求めたいものが斜辺なら、既知の辺が向かい側かとなり側かを見て $\sin$ または $\cos$ を選びます。

水平距離を求める

高さが分かっている場合も同じ考え方

ある地点から塔の頂上を見る仰角が 45° で、塔の高さが 12 m だとします。

塔までの水平距離を x m とすると、

$$\tan 45^\circ = \frac{12}{x}$$

です。

$\tan 45^\circ = 1$ なので $x = 12$ です。

三角比を使う問題では、「高さを求める問題」だけでなく、水平距離や斜辺を求める場合も、同じ手順で考えられます。

観測する位置に高さがある場合

求めた高さに最後の長さを足す

人の目の高さから建物の頂上を見上げる場合、直角三角形から求められるのは「目の高さから頂上までの高さ」です。

たとえば、目の高さが地面から 1.5 m なら、

建物の高さ = 三角比で求めた高さ + 1.5

とします。

三角比の計算が正しくても、問題文にある目の高さなどを最後に反映し忘れると、求める量とは違う答えになります。

文章題を解く手順

1. 求めたい長さを確認する。
2. 直角三角形になる部分を見つける。
3. 基準となる角を確認する。
4. 分かっている辺と求めたい辺を分類する。
5. $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ から 1 つを選ぶ。
6. 式を立てて長さを求める。
7. 目の高さなど、三角形の外にある条件を最後に反映する。

例題**例題 1**

塔から水平に 15 m 離れた地点から塔の頂上を見たところ、仰角は 45° であった。
観測点の高さは地面と同じものとして、塔の高さを求めなさい。

例題 1 の解答・解説

塔の高さを h m とします。

角 45° に対して、高さ h は向かい側、15 m はとなりの辺です。

したがって、 $\tan 45^\circ = \frac{h}{15}$ です。

$\tan 45^\circ = 1$ なので、 $h = 15$ です。

よって、塔の高さは 15 m です。

例題 2

地面と 30° の角をなすまっすぐな坂道がある。

坂道を上ることによって高さが 6 m 増えるとき、坂道の長さを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

坂道の長さを x m とします。

30° に対して、高さ 6 m は向かい側、坂道 x m は斜辺です。

したがって、 $\sin 30^\circ = \frac{6}{x}$ です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $x = 12$ です。

よって、坂道の長さは 12 m です。

例題 3

地面から目までの高さが 1.5 m の人が、建物から水平に 10 m 離れた地点に立っている。

目の位置から建物の頂上を見る仰角が 45° のとき、建物の高さを求めなさい。

例題 3 の解答・解説

目の高さから建物の頂上までの高さを h m とします。

$\tan 45^\circ = \frac{h}{10}$ なので、 $h = 10$ です。

これは地面からの建物全体の高さではありません。

目の高さ 1.5 m を加えると、 $10 + 1.5 = 11.5$ です。

したがって、建物の高さは 11.5 m です。

演習問題

練習問題 1

木から水平に 8 m 離れた地点から木の頂上を見たところ、仰角は 45° であった。
観測点の高さは地面と同じものとして、木の高さを求めなさい。

練習問題 2

塔から水平に 12 m 離れた地点から塔の頂上を見たところ、仰角は 30° であった。
観測点の高さは地面と同じものとして、塔の高さを求めなさい。

練習問題 3

地面と 60° の角をなす斜面の長さが 10 m である。
この斜面を下端から上端まで進んだときの高さの増加を求めなさい。

練習問題 4

地面と 30° の角をなすまっすぐな坂道がある。
坂道の水平距離が $6\sqrt{3}$ m のとき、坂道の長さを求めなさい。

練習問題 5

高さ 9 m の塔がある。
塔の頂上を見る仰角が 30° となる地点は、塔の根元から水平に何 m 離れているか求めなさい。

練習問題 6

地面から目までの高さが 1.6 m の人が、建物から水平に 7 m 離れた地点から建物の頂上を見たところ、仰角は 45° であった。
建物の高さを求めなさい。

練習問題 7

ある直角三角形について、基準となる角は 60° である。
その角に接する斜辺以外の辺の長さが 4 cm のとき、斜辺の長さと、角 60° の向かい側の辺の長さをそれぞれ求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、建物から水平に 20 m 離れた地点で頂上への仰角が 30° であることから、

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{建物の高さ}}{20}$$

と式を立てました。

観測点の高さは地面と同じものとしします。この式が適切でない理由を説明し、正しい式を書きなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

木の高さを h m とします。

高さ と 水平距離 を使うので、 $\tan 45^\circ = \frac{h}{8}$ です。

$\tan 45^\circ = 1$ なので、 $h = 8$ です。

したがって、木の高さは 8 m です。

練習問題 2 の解答・解説

塔の高さを h m とします。

$\tan 30^\circ = \frac{h}{12}$ です。

$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ なので、 $h = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ です。

したがって、塔の高さは $4\sqrt{3}$ m です。

練習問題 3 の解答・解説

高さの増加を h m とします。

斜面 10 m は斜辺なので、 $\sin 60^\circ = \frac{h}{10}$ です。

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、 $h = 5\sqrt{3}$ です。

したがって、高さの増加は $5\sqrt{3}$ m です。

練習問題 4 の解答・解説

坂道の長さを x m とします。

水平距離は 30° に対するとなりの辺なので、

$$\cos 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{x}$$

です。

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、 $x = 12$ です。

したがって、坂道の長さは 12 m です。

練習問題 5 の解答・解説

塔までの水平距離を x m とします。

高さ 9 m は向かい側なので、 $\tan 30^\circ = \frac{9}{x}$ です。

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{x}$ より、 $x = 9\sqrt{3}$ です。

したがって、水平距離は $9\sqrt{3}$ m です。

練習問題 6 の解答・解説

目の位置から頂上までの高さを h m とします。

$\tan 45^\circ = \frac{h}{7}$ なので、 $h = 7$ です。

地面から目までの高さ 1.6 m を加えます。

したがって、建物の高さは $7 + 1.6 = 8.6$ m です。

練習問題 7 の解答・解説

斜辺を x cm とします。

$\cos 60^\circ = \frac{4}{x}$ なので、 $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$ です。

したがって、斜辺は $x = 8$ cm です。

向かい側の辺を y cm とすると、 $\tan 60^\circ = \frac{y}{4}$ です。

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ なので、 $y = 4\sqrt{3}$ cm です。

練習問題 8 の解答・解説

20 m は仰角 30° に対するとなりの辺であり、斜辺ではありません。

$\sin$ は「向かい側の辺 ÷ 斜辺」なので、分母に水平距離 20 m を置くことはできません。

高さを h m とすると、向かい側となりの辺を使うため、正接を使います。

正しい式は、

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{20}$$

です。