

第 84 講 不等式の証明

学習目標

- $A \geq B$ を証明するとき、差 $A - B$ に注目して考えられるようになる。
- 差を平方や因数の積に変形し、それが 0 以上になる理由を説明できるようになる。
- 不等式が成り立つための条件を確認し、等号が成立する条件まで求められるようになる。

等式の証明との違い

083 「等式の証明」では、2 つの式が同じ値になることを示した。たとえば $A = B$ を証明するなら、左辺を変形して右辺に一致させたり、差 $A - B$ が 0 になることを示したりする方法が使える。

不等式の証明では、式が一致することではなく、**どちらが大きいか**を示す必要がある。

たとえば $A \geq B$ を証明したいとする。このとき、

$$A - B \geq 0$$

を示せばよい。

したがって、不等式の証明では「左辺と右辺の差をつくり、その差がなぜ 0 以上になるのかを説明する」という考え方が基本になる。

差を 0 以上の形にする

$A \geq B$ を証明するときの基本手順は次の通りである。

1. 左辺から右辺を引いて $A - B$ をつくる。
2. $A - B$ を平方や因数の積など、符号を判断しやすい形に変形する。
3. 問題の条件を使い、その式が 0 以上であることを示す。
4. $A - B = 0$ となる条件を調べ、等号成立条件を確認する。

特に、実数 t について常に

$$t^2 \geq 0$$

であることは、不等式の証明で重要な根拠となる。

結論を先に仮定しない

証明したい不等式そのものを「成り立つもの」として使ってはいけない。

たとえば $A \geq B$ を証明するときに、「 $A \geq B$ だから $A - B \geq 0$ である」と書いても証明にはならない。これは、証明すべき結論を根拠として使っているからである。

安全な書き方は、まず差 $A - B$ を計算し、それを既に分かっている事実から 0 以上だと示すことである。

平方をつくる

平方は必ず 0 以上になるため、差を平方の形にできれば不等式を証明できる。

たとえば $x^2 - 6x + 11 \geq 2$ を考える。左辺と右辺の差は

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 11 - 2 &= x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 \end{aligned}$$

である。

x は実数なので $(x - 3)^2 \geq 0$ である。これにより、元の不等式が成り立つことが分かる。

また、等号が成立するのは差が 0 になるときなので、 $(x-3)^2 = 0$ 、すなわち $x = 3$ のときである。

例題 1

すべての実数 x について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$x^2 - 6x + 11 \geq 2$$

例題 1 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 11 - 2 &= x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 \end{aligned}$$

となる。

x は実数なので $(x-3)^2 \geq 0$ である。したがって、 $x^2 - 6x + 11 \geq 2$ が成り立つ。
等号が成立するのは $(x-3)^2 = 0$ のときであり、 $x = 3$ である。

2 つの文字を含む場合

文字が 2 つあっても考え方は同じである。

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ を証明したい場合、差を計算すると

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

となる。

a, b が実数なら $(a-b)^2 \geq 0$ なので、不等式が成り立つ。
等号が成立するのは $(a-b)^2 = 0$ 、すなわち $a = b$ のときである。

例題 2

すべての実数 a, b について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

例題 2 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

となる。

a, b は実数なので $(a-b)^2 \geq 0$ である。したがって、 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ が成り立つ。
等号が成立するのは $(a-b)^2 = 0$ のときであり、 $a = b$ である。

条件が必要な場合

差を平方にできても、それだけでは証明が終わらない場合がある。

$x > 0$ のとき、 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ を考える。

左辺と右辺の差は

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} - 4 &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x} \end{aligned}$$

である。

分子の $(x-2)^2$ は 0 以上である。しかし、分数全体の符号を決めるには分母 x の符号も確認する必要がある。

ここでは条件が $x > 0$ なので分母は正である。したがって、

$$\frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

となり、元の不等式が証明できる。

このように、平方が現れたことだけで証明を終えず、分母や各因数の符号を条件から確認することが重要である。

例題 3

$x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$x + \frac{4}{x} \geq 4$$

例題 3 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} - 4 &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x} \end{aligned}$$

となる。

$(x-2)^2 \geq 0$ であり、条件 $x > 0$ より分母 x は正である。したがって、

$$\frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

である。

よって、 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ が成り立つ。

等号が成立するのは $(x-2)^2 = 0$ のときであり、 $x = 2$ である。 $x = 2$ は条件 $x > 0$ も満たしている。

因数の積で示す場合

差が因数分解できる場合には、各因数の符号を調べることで 0 以上であることを示せる。

たとえば $(x-3)(x-5) \geq 0$ を示したい場合、単に「因数分解できたから 0 以上」としてはいけない。

$x \geq 5$ という条件があれば、 $x-3 \geq 0$ かつ $x-5 \geq 0$ なので、その積も 0 以上である。

一方、条件がなければ各因数の符号は変化するため、常に積が 0 以上とは限らない。因数の積を使う証明では、問題の条件と符号を結び付ける必要がある。

演習問題

演習問題 1

すべての実数 x について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$x^2 + 8x + 20 \geq 4$$

演習問題 2

すべての実数 a, b について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$$

演習問題 3

すべての実数 x, y について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$4x^2 + y^2 \geq 4xy$$

演習問題 4

$x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$2x + \frac{8}{x} \geq 8$$

演習問題 5

$x \geq 5$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$x^2 - 8x + 15 \geq 0$$

演習問題 6

$x \leq -2$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 20 - 4 &= x^2 + 8x + 16 \\&= (x + 4)^2\end{aligned}$$

となる。

x は実数なので $(x + 4)^2 \geq 0$ である。したがって、 $x^2 + 8x + 20 \geq 4$ が成り立つ。
等号が成立するのは $(x + 4)^2 = 0$ のときであり、 $x = -4$ である。

演習問題 2 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned}2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2 &= 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \\&= a^2 - 2ab + b^2 \\&= (a - b)^2\end{aligned}$$

となる。

a, b は実数なので $(a - b)^2 \geq 0$ である。したがって、 $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$ が成り立つ。
等号が成立するのは $(a - b)^2 = 0$ のときであり、 $a = b$ である。

演習問題 3 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned}4x^2 + y^2 - 4xy &= 4x^2 - 4xy + y^2 \\&= (2x - y)^2\end{aligned}$$

となる。

x, y は実数なので $(2x - y)^2 \geq 0$ である。したがって、 $4x^2 + y^2 \geq 4xy$ が成り立つ。
等号が成立するのは $(2x - y)^2 = 0$ のときであり、 $y = 2x$ である。

演習問題 4 の解答・解説

左辺から右辺を引くと、

$$\begin{aligned}2x + \frac{8}{x} - 8 &= \frac{2x^2 - 8x + 8}{x} \\&= \frac{2(x - 2)^2}{x}\end{aligned}$$

となる。

$(x - 2)^2 \geq 0$ なので $2(x - 2)^2 \geq 0$ である。また、条件 $x > 0$ より分母 x は正である。したがって、

$$\frac{2(x - 2)^2}{x} \geq 0$$

である。

よって、 $2x + \frac{8}{x} \geq 8$ が成り立つ。

等号が成立するのは $(x - 2)^2 = 0$ のときであり、 $x = 2$ である。これは条件 $x > 0$ を満たしている。

演習問題 5 の解答・解説

左辺を因数分解すると、

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

となる。

条件 $x \geq 5$ より、 $x - 3 \geq 0$ かつ $x - 5 \geq 0$ である。したがって、

$$(x - 3)(x - 5) \geq 0$$

である。

よって、 $x^2 - 8x + 15 \geq 0$ が成り立つ。

等号が成立するには $(x - 3)(x - 5) = 0$ でなければならない。候補は $x = 3, 5$ であるが、条件 $x \geq 5$ を満たすのは $x = 5$ だけである。したがって、等号が成立するのは $x = 5$ のときである。

演習問題 6 の解答・解説

左辺を因数分解すると、

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

となる。

条件 $x \leq -2$ より、 $x + 2 \leq 0$ かつ $x - 1 < 0$ である。したがって、2 つの因数はいずれも 0 以下であり、その積は 0 以上になる。

よって、

$$(x + 2)(x - 1) \geq 0$$

であり、 $x^2 + x - 2 \geq 0$ が成り立つ。

等号が成立するには $(x + 2)(x - 1) = 0$ でなければならない。候補は $x = -2, 1$ であるが、条件 $x \leq -2$ を満たすのは $x = -2$ だけである。したがって、等号が成立するのは $x = -2$ のときである。