

第 47 講 三角形の外心・内心・重心

学習目標

- ・ 外心・内心・重心が、それぞれどの直線の交点として定まるか説明できる。
- ・ 外心が 3 つの頂点から等距離にあることを使える。
- ・ 内心が 3 つの辺から等距離にあることを使える。
- ・ 重心が各中線を頂点側から $2:1$ に分けることを使える。
- ・ 問題の条件から、外心・内心・重心のどれについて述べているか見分けられる。

三角形には特徴の異なる 3 つの中心がある

何の中心なのかを区別する

三角形には、いくつかの重要な「中心」があります。

この講では、次の 3 つを扱います。

- ・ 外心
- ・ 内心
- ・ 重心

どれも三角形に関係する特別な点ですが、作り方も性質も異なります。

見分けるときは、次の 3 つの言葉に注目します。

- ・ 辺の垂直二等分線 → 外心
- ・ 内角の二等分線 → 内心
- ・ 中線 → 重心

まず「どの直線の交点なのか」を覚えると、その後の性質を整理しやすくなります。

3 つの中心の入り口

- ・ 外心：辺の垂直二等分線の交点
- ・ 内心：内角の二等分線の交点
- ・ 重心：中線の交点

この 3 つを混同しないことが、この講の基本です。

外心

外心

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わります。
その交点を三角形の外心といいます。

外心は 3 頂点から等距離

線分 AB の垂直二等分線上にある点は、 A と B からの距離が等しくなります。
したがって、三角形 ABC の辺 AB と辺 BC の垂直二等分線の交点を O とすると、

$$OA = OB$$

かつ、

$$OB = OC$$

です。

よって、

$$OA = OB = OC$$

となります。

つまり、外心は 3 つの頂点から等しい距離にある点です。

外心の基本性質

三角形 ABC の外心を O とすると、

$$OA = OB = OC$$

です。

したがって、 O を中心として OA を半径とする円は、3 頂点 A, B, C を通ります。

外心は必ず三角形の内部とは限らない

外心の位置は三角形の形によって変わります。

- ・ 鋭角三角形では内部
- ・ 直角三角形では斜辺の中点
- ・ 鈍角三角形では外部

にあります。

「中心」という名前だけから、必ず内部にあると思わないようにします。

内心

内心

三角形の 3 つの**内角の二等分線**は 1 点で交わります。

その交点を三角形の**内心**といいます。

内心は 3 辺から等距離

1 つの角の二等分線上にある点は、その角を作る 2 辺からの距離が等しくなります。

三角形 ABC の内角の二等分線の交点を I とします。

I から 3 辺 AB, BC, CA へ垂線を下ろすと、その 3 本の垂線の長さは等しくなります。

つまり、内心は 3 つの辺から等しい距離にある点です。

内心の基本性質

三角形の内心 I から 3 辺へ下ろした垂線の長さは、すべて等しくなります。

そのため、 I を中心として各辺までの距離を半径とする円は、三角形の 3 辺すべてに接します。

辺からの距離は垂直な長さ

点から辺までの距離とは、その点から辺へ垂直に下ろした線分の長さです。

内心から頂点までの距離が等しいわけではありません。

重心

中線と重心

三角形の 1 つの頂点と、その向かいの辺の中点を結ぶ線分を**中線**といいます。

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わります。

その交点を三角形の**重心**といいます。

重心は中線を 2 対 1 に分ける

三角形 ABC で、辺 BC の中点を M とします。

線分 AM は中線です。

重心を G とすると、 G は中線 AM 上にあり、

$$AG : GM = 2 : 1$$

となります。

つまり、重心は中線をちょうど半分に分けるものではありません。

頂点から重心までが 2、重心から辺の中点までが 1 となる位置にあります。

重心の基本性質

重心 G は、3 本すべての中線について、

$$\text{頂点から } G : G \text{ から辺の中点} = 2 : 1$$

となるように分けます。

2 対 1 の向きを間違えない

中線 AM 上で、

$$AG : GM = 2 : 1$$

です。

G は頂点 A よりも辺の中点 M に近い位置にあります。

中線全体 AM のうち、

$$AG = \frac{2}{3}AM$$

$$GM = \frac{1}{3}AM$$

です。

外心・内心・重心を見分ける

問題文の言葉から中心を決める

3 つの中心は、問題文に現れる条件から見分けられます。

手掛かり	中心	基本性質
辺の垂直二等分線	外心	3 頂点から等距離
内角の二等分線	内心	3 辺から等距離
頂点と対辺の中点を結ぶ中線	重心	中線を頂点側から 2 : 1 に分ける

たとえば、「3 頂点から等しい距離にある点」とあれば外心を考えます。
「3 辺までの距離が等しい点」なら内心です。
「中線上にあり、長さの比が 2 : 1」なら重心です。

見分けるための 3 語

- ・ 頂点から等距離 → 外心
- ・ 辺から等距離 → 内心
- ・ 中線を 2 : 1 → 重心

この 3 つを対応させて覚えます。

垂直二等分線と角の二等分線を混同しない

外心で使うのは**辺の垂直二等分線**です。

内心で使うのは**角の二等分線**です。

どちらにも「二等分線」という言葉がありますが、何を二等分しているかが違います。

例題

例題 1

三角形 ABC の外心を O とします。

$$OA = 7$$

のとき、 OB, OC の長さを求めなさい。

例題 1 の解答・解説

外心は 3 頂点から等距離にあります。
したがって、

$$OA = OB = OC$$

です。

$OA = 7$ なので、

$$OB = 7, \quad OC = 7$$

です。

例題 2

三角形 ABC の内心を I とし、 I から辺 AB, BC, CA へ下ろした垂線の足を、それぞれ P, Q, R とします。

$$IP = 4$$

のとき、 IQ, IR の長さを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

内心は 3 辺から等距離にあります。
したがって、

$$IP = IQ = IR$$

です。

$IP = 4$ なので、

$$IQ = 4, \quad IR = 4$$

です。

例題 3

三角形 ABC で、辺 BC の中点を M とし、重心を G とします。

$$AM = 12$$

のとき、 AG と GM を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

重心は中線を頂点側から $2:1$ に分けます。
したがって、

$$AG : GM = 2 : 1$$

です。

中線全体 $AM = 12$ は 3 等分に対応するので、1 つ分は 4 です。
よって、

$$AG = 8, \quad GM = 4$$

です。

演習問題

練習問題 1

次の説明に当てはまる中心を、外心・内心・重心から選びなさい。
「三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点」

練習問題 2

次の説明に当てはまる中心を、外心・内心・重心から選びなさい。
「三角形の 3 つの内角の二等分線の交点」

練習問題 3

次の説明に当てはまる中心を、外心・内心・重心から選びなさい。
「三角形の 3 本の中線の交点」

練習問題 4

三角形 ABC の外心を O とします。

$$OB = 9$$

のとき、 OA と OC を求めなさい。

練習問題 5

三角形 ABC の内心を I とし、 I から 3 辺へ下ろした垂線の長さのうち 1 つが 6 でした。
残り 2 本の垂線の長さを求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC で、 M は辺 BC の中点、 G は重心です。

$$AG = 10$$

のとき、 GM と AM を求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC で、 M は辺 BC の中点、 G は重心です。

$$GM = 5$$

のとき、 AG と AM を求めなさい。

練習問題 8

次の各条件に当てはまる中心を、外心・内心・重心から選びなさい。

- (1) 3 つの頂点までの距離がすべて等しい。
- (2) 3 つの辺までの距離がすべて等しい。
- (3) 各中線を頂点側から 2 : 1 に分ける。

練習問題 9

ある生徒は、
「内心は三角形の 3 つの頂点から等しい距離にある点である」
と答えました。
この説明の誤りを指摘し、内心と外心の性質を正しく説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

3 辺の垂直二等分線の交点は、外心です。

練習問題 2 の解答・解説

3 つの内角の二等分線の交点は、内心です。

練習問題 3 の解答・解説

3 本の中線の交点は、重心です。

練習問題 4 の解答・解説

外心は 3 頂点から等距離なので、

$$OA = OB = OC$$

です。

$OB = 9$ より、

$$OA = 9, \quad OC = 9$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

内心は 3 辺から等距離にあります。

したがって、残り 2 本の垂線の長さもそれぞれ 6 です。

練習問題 6 の解答・解説

重心は中線を頂点側から $2:1$ に分けるので、

$$AG : GM = 2 : 1$$

です。

$AG = 10$ は 2 つ分に当たるので、1 つ分は 5 です。

したがって、

$$GM = 5$$

です。

よって、

$$AM = AG + GM = 15$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

$AG : GM = 2 : 1$ です。

$GM = 5$ が 1 つ分なので、

$$AG = 10$$

です。

したがって、

$$AM = 10 + 5 = 15$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

- (1) 3 頂点から等距離にある点は外心です。
- (2) 3 辺から等距離にある点は内心です。
- (3) 各中線を頂点側から $2:1$ に分ける点は重心です。

練習問題 9 の解答・解説

内心について、「3 つの頂点から等距離」とした点が誤りです。
内心は 3 つの内角の二等分線の交点で、3 辺から等距離にあります。
一方、外心は 3 辺の垂直二等分線の交点で、3 つの頂点から等距離にあります。