第 025 講 剛体のつり合いと重心

この講でできるようになること

- 剛体が静止するための合力と力のモーメントの条件を説明できる。
- 力の作用点を区別し、水平な棒を支える反力を求められる。
- 物体の重心を求め、重力の作用点として扱える。
- 重心の鉛直線と支持範囲の関係から、転倒の限界を判断できる。
- 水平に押す力と転倒の関係を調べ、重心の高さや支持幅による安定性の違いを説明できる。

1. 力がつり合っても、物体が回ることがある

机の上に置いた本を考える。両手で本を反対向きに同じ大きさの力で押しても、押す位置によっては本が回ろうとする。

たとえば、本の上側を右向きに、下側を左向きに同じ大きさで押すと、左右の力の合計は 0 である。しかし、2 つの力が異なる位置に作用するため、本を回そうとする効果が残る。

ここで重要なのは、**物体全体を動かす効果と、物体を回す効果を別々に調べること**である。

1.1 剛体とは何か

剛体

力が加わっても、形や大きさが変わらないとみなす物体を剛体という。

現実の物体は力によって多少変形するが、その変形が十分小さい場合には剛体として扱える。

剛体では、物体全体が移動することと、向きが変わることを区別して考える必要がある。

1.2 剛体が静止する 2 つの条件

水平方向をx方向、鉛直方向をy方向とする。力の水平方向の成分をF_x、鉛直方向の成分をF_yと書く。

また、ある点のまわりに物体を回そうとする効果を力のモーメントと呼ぶ。反時計回りを正、時計回りを負と約束し、その点まわりのモーメントをMと表す。

平面内の剛体について、外力の合力と合モーメントがともに 0 ならば、並進運動と回転運動の状態は変化しない。

剛体のつり合いの条件

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

$\sum$は、対象の物体にはたらく外力またはそのモーメントをすべて足し合わせることを表す。

3 つ目の式は、任意に選んだ 1 つの点のまわりで成り立つ必要がある。

©ミライコーチング

これらは、物体の移動の状態と回転の状態が変化しないための条件である。物体が最初から静止していれば、つり合いの条件が保たれる間、そのまま静止できる。

一方、すでに動いている物体が合力 0 になっても、その瞬間に停止するわけではない。

1.3 なぜ両方の条件が必要なのか

次の 2 つを比較する。

合力は 0 だが、合モーメントが 0 ではない場合

同じ大きさの 2 つの力が反対向きに作用していても、作用線が離れていれば回転させる効果が残る。物体全体を一方向に動かす合力は 0 であっても、回転のつり合いは成立しない。

ある点まわりの合モーメントは 0 だが、合力が 0 ではない場合

物体のある点に 1 つの力を加えると、その作用点まわりのモーメントは 0 である。しかし、合力はその力の分だけ残っているため、自由に動ける物体では並進運動の状態が変化する。

したがって、片方の条件だけでは剛体の静止を保証できない。

ポイント

剛体のつり合いでは、次の 2 点を必ず分けて調べる。

- 合力が 0 か。
- 合モーメントが 0 か。

合力が 0 というだけで、回転しないと判断してはならない。

---

2. 棒を支える力を求める

水平な棒を左右 2 か所で支える場合を考える。

棒には重力が下向きにはたらき、支持点からは上向きの力がはたらく。このように接触面から物体を押す力を垂直抗力という。

まずは棒が水平なまま静止し、支持点が動かない状況を考える。棒に働く力をすべて挙げてから、つり合いの条件を使う。

2.1 モーメントを考える点の選び方

ある点まわりのモーメントの大きさは、力の大きさと、その点から力の作用線までの垂直距離を掛けて求められる。

$$|M| = FL$$

ここでFは力の大きさ、Lは作用線までの垂直距離である。符号付きのMは、反時計回りを正、時計回りを負とする。モーメントの単位はN mとなる。

力の作用線が基準点を通るときは、$L = 0$であるため、その力のモーメントは 0 になる。

したがって、未知の反力がはたらく支持点をモーメントの基準点に選ぶと、その反力を式から消すことができる。

1

長さ2.0 mの一様な水平棒 AB があり、左端 A と右端 B で下から支えられて静止している。

棒の重量は40 Nで、重力は棒の中央にはたらく。また、A から右へ0.50 mの位置に、下向きの力20 Nを加えている。

左右の支持点が棒を押す上向きの力を、それぞれR_A、R_Bとする。

位置	A からの距離	はたらく力
A	0 m	上向きの反力R_A
追加の力の作用点	0.50 m	下向き20 N
棒の中央	1.0 m	下向き40 N
B	2.0 m	上向きの反力R_B

(1) 鉛直方向の力のつり合いの式を立てよ。

(2) A まわりのモーメントのつり合いを用いて、R_Bを求めよ。

(3) R_Aを求め、両方の反力が上向きであることを確認せよ。

解説

(1) 上向きを正とする。棒にはたらく上向きの力はR_AとR_B、下向きの力は40 Nと20 Nである。

$$R_A + R_B - 40\,\mathrm{N} - 20\,\mathrm{N} = 0$$

よって、

$$R_A + R_B = 60\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) A まわりでは、R_Aの作用線が A を通るので、R_Aのモーメントは 0 である。

反時計回りを正にすると、右端の反力R_Bは正、下向きの 2 つの力は負のモーメントをつくる。

$$0 = R_B \times 2.0\,\mathrm{m}$$
$$-40\,\mathrm{N} \times 1.0\,\mathrm{m}$$
$$-20\,\mathrm{N} \times 0.50\,\mathrm{m}$$

したがって、

$$R_B \times 2.0\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{N\,m} + 10\,\mathrm{N\,m}$$
$$= 50\,\mathrm{N\,m}$$

より、

$$R_B = \frac{50\,\mathrm{N\,m}}{2.0\,\mathrm{m}} = 25\,\mathrm{N}$$

となる。

(3) 鉛直方向のつり合いから、

$$\begin{aligned} R_A &= 60\,\mathrm{N} - 25\,\mathrm{N} \\ &= 35\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

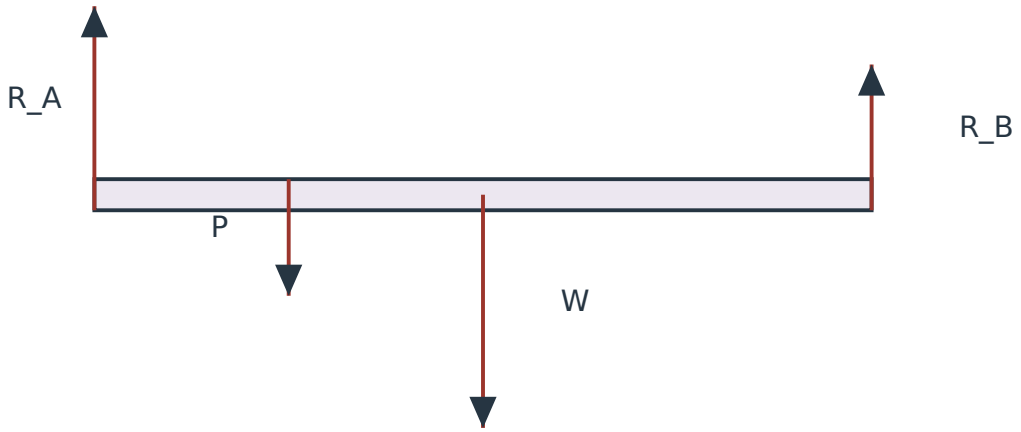


図 1　水平棒にはたらく全力。棒の両端 A、B を支持し、重力 40N、追加の下向き力 20N、左支持反力 35N、右支持反力 25N を表す。全矢印は共通の力尺度 3px/N。

図のWは棒自身の重量、Pは追加した下向きの力である。棒が一様なので、自身の重力は中央にまとめて表せる。

両反力は$R_A = 35\,\mathrm{N}$、$R_B = 25\,\mathrm{N}$であり、いずれも正の値となる。したがって、設定した上向きの反力と矛盾しない。

また、B まわりでもモーメントを確認できる。

$$\begin{aligned} &40\,\mathrm{N} \times 1.0\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{N} \times 1.5\,\mathrm{m} \\ &\quad -35\,\mathrm{N} \times 2.0\,\mathrm{m} \\ &= 40\,\mathrm{N\,m} + 30\,\mathrm{N\,m} - 70\,\mathrm{N\,m} \\ &= 0\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$

力のつり合いだけでなく、回転のつり合いも成立している。

ポイント

支持反力を求めるときは、未知の反力の作用点をモーメントの基準点に選ぶと計算しやすい。ただし、最後に合力のつり合いと反力の向きを確認する必要がある。

3. 重心は、重力をまとめて考えるための点

棒や箱の重力は、本来、物体を構成する各部分にはたらいている。

しかし、重力の向きと大きさの分布を考慮すると、それらを 1 つの力にまとめて扱うことができる。

その力の作用点として扱える位置が重心である。

重心

一様な重力場で、物体の各部分にはたらく重力を合成し、1 つの重力として作用するとみなせる点を重心という。

重心をG、物体全体の重量をWとすれば、重力はGにはたらく下向きの力Wとして表せる。

一様な棒や、密度が一様で左右対称な箱では、重心は幾何学的な中央にある。

しかし、見た目の中央と重心は常に一致するわけではない。物体の一部だけが重い場合には、重心は重い部分に近づく。

3.1 2 つの質点から重心を求める

質量がm_1、m_2の 2 つの小さな物体を、質量を無視できる棒でつなぐ。

位置をそれぞれx_1、x_2とし、$x_1 < x_2$とする。重心の位置をx_Gとする。

同じ場所での重力加速度の大きさをgとすると、2 つの重力の大きさはm_1g、m_2gである。

重心まわりでは、左右の重力のモーメントが打ち消し合う。

$$m_1g(x_G - x_1) = m_2g(x_2 - x_G)$$

この式を整理すると、

$$m_1gx_G - m_1gx_1 = m_2gx_2 - m_2gx_G$$

$$(m_1 + m_2)gx_G = m_1gx_1 + m_2gx_2$$

共通のgを消して、

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

となる。

これは、各質量とその位置を掛けた値を足し、全質量で割る式である。2 つの質量が等しければ重心は中点となり、異なれば重い方に寄る。

複数の部分からなる物体でも、各部分の質量と重心の位置が分かっていれば、同じ考え方を使える。

2

質量を無視できる長さ1.0 mの棒の左端に質量2.0 kg、右端に質量3.0 kgの小さな物体を固定した。左端を$x = 0\,\mathrm{m}$、右端を$x = 1.0\,\mathrm{m}$とし、右向きを正とする。重力加速度の大きさは$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$とする。

(1) 2 つの物体を合わせた重心の位置x_Gを求めよ。

(2) 重心から左右の物体までの距離をそれぞれ求めよ。

(3) 重心まわりで 2 つの重力のモーメントが打ち消し合うことを確かめよ。

解説

(1) 重心の式に代入する。

$$x_G = \frac{2.0\,\mathrm{kg} \times 0\,\mathrm{m} + 3.0\,\mathrm{kg} \times 1.0\,\mathrm{m}}{2.0\,\mathrm{kg} + 3.0\,\mathrm{kg}}$$

$$= \frac{3.0\,\mathrm{kg\,m}}{5.0\,\mathrm{kg}}$$

$$= 0.60\,\mathrm{m}$$

したがって、重心は左端から0.60 mの位置にある。

(2) 左側の物体までの距離は、

$$0.60\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} = 0.60\,\mathrm{m}$$

右側の物体までの距離は、

$$1.0\,\mathrm{m} - 0.60\,\mathrm{m} = 0.40\,\mathrm{m}$$

である。

(3) 左側の重力は、

$$2.0\,\mathrm{kg}\times 10\,\mathrm{m/s^2}=20\,\mathrm{N}$$

右側の重力は、

$$3.0\,\mathrm{kg}\times 10\,\mathrm{m/s^2}=30\,\mathrm{N}$$

となる。

重心まわりでは、左側の重力が反時計回り、右側の重力が時計回りのモーメントをつくる。

$$M_{左}=20\,\mathrm{N}\times 0.60\,\mathrm{m}$$

$$=12\,\mathrm{N\,m}$$

$$M_{右}=-30\,\mathrm{N}\times 0.40\,\mathrm{m}$$

$$=-12\,\mathrm{N\,m}$$

したがって、

$$M_{左}+M_{右}=0\,\mathrm{N\,m}$$

である。

重い方の物体は重心に近いため、2 つの重力の回転効果が打ち消し合っている。

4. 重心の鉛直線と支持範囲

机に置いた箱を少し横へずらしても、すぐには倒れない。しかし、机の端から大きくはみ出すと、倒れようとする。

この違いを考えるには、重心の真下がどこにあるかを調べる。

4.1 支持範囲とは何か

物体を下から支えている部分の範囲を支持範囲という。

ここでは、水平な床に物体が接しており、紙面内の左右方向に転倒する単純な場合を考える。

重心Gから鉛直下向きに延ばした直線が床と交わる位置を、重心の鉛直投影と呼ぶ。

床との支持範囲が A から B までの場合、その投影位置と支持範囲の関係が重要になる。

ただし、次の判定は、**重力と水平な支持面からの力以外に外力がなく、物体が初め静止している場合**に限る。

重心の鉛直投影	静的なつり合いの判断
支持範囲の内部	つり合いが可能
支持範囲の端	転倒の限界
支持範囲の外側	つり合いは不可能

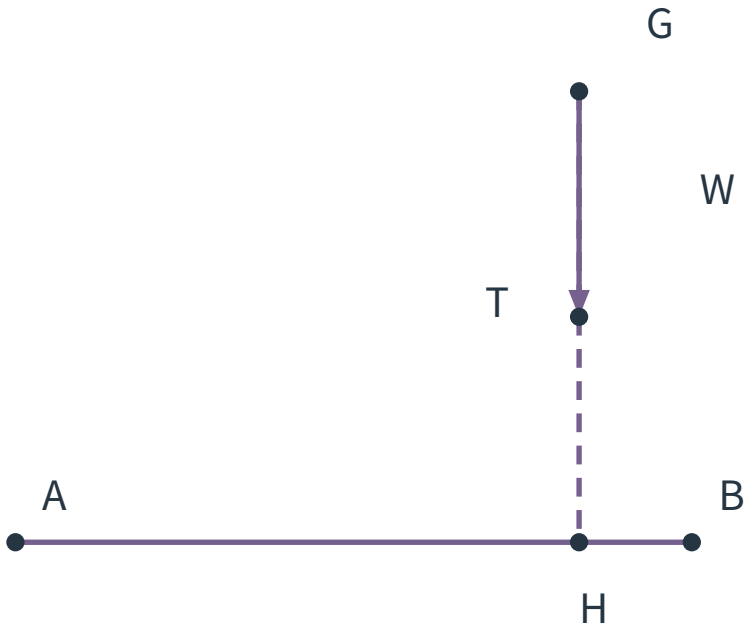
4.2 なぜ支持範囲の内側なら支えられるのか

水平な床から受ける垂直抗力は、物体を上向きに押す力である。床が物体を下向きに引っ張ることはできない。

接触が複数の場所に広がっているとき、それぞれの垂直抗力を 1 つの合力としてまとめて考えられる。この合力の作用位置は、支持範囲の中で移動できる。

重力と床からの力だけがはたらく静止状態では、上向きの合力と下向きの重力が同じ作用線上で打ち消し合う必要がある。

したがって、重心の鉛直投影が支持範囲の中にあれば、床の抗力によって重力を支えられる。



この図は支持範囲と重心の位置関係だけを示した模式図であり、物体の輪郭と床の抗力は省略している。A から B が支持範囲、Gが重心、Hが鉛直投影である。下向きの矢印Wは重力を表す。

図の 1 座標単位は0.10 mに対応する。支持範囲を$x = -0.30\,\mathrm{m}$から$x = 0.30\,\mathrm{m}$とすると、Hの位置は$x = 0.20\,\mathrm{m}$であり、支持範囲の内部にある。

このため、先に述べた外力条件のもとでは、静的なつり合いが可能である。

4.3 支持範囲の端を越えたらどうなるか

重心の鉛直投影が端 B に一致すると、床の抗力の作用位置も端 B まで移動した限界状態となる。

さらに重心の鉛直投影が B の外側へ移動すると、重力は B まわりで物体を転倒させる向きのモーメントをつくる。

床からの垂直抗力は支持範囲の外側には作用できないため、このモーメントを打ち消せなくなる。

ただし、**ちょうど境界に達したことと、すでに転倒して回転していることは異なる**。境界は転倒の限界であり、そこからさらに重心の鉛直投影が外側へ移ると、重力による転倒が進む。

3

水平な床の支持範囲を$x=-0.30\,\mathrm{m}$から$x=0.30\,\mathrm{m}$とする。

質量分布や物体の配置を変えた 3 つの構成物体 A、B、C を考え、それぞれの重心の鉛直投影を次のように定める。

構成物体	重心の鉛直投影
A	$x=0.20\,\mathrm{m}$
B	$x=0.30\,\mathrm{m}$
C	$x=0.35\,\mathrm{m}$

各物体は初め静止しており、重力と水平な支持面からの力以外に外力はない。

それぞれについて、静的なつり合いが可能か、転倒の限界か、静的なつり合いが不可能かを判断し、理由を説明せよ。

解説

A の投影位置$0.20\,\mathrm{m}$は支持範囲の内部にある。床の抗力の合力を適切な位置で作用させれば、重力とつり合わせられる。

B の投影位置$0.30\,\mathrm{m}$は右端と一致する。床からの抗力の作用位置が右端に達した転倒限界である。

C の投影位置$0.35\,\mathrm{m}$は右端$0.30\,\mathrm{m}$より外側にある。床の抗力を支持範囲の外側に作用させることはできないため、静的なつり合いは成立しない。

構成物体	判定	根拠
A	静的なつり合いが可能	投影が内部
B	転倒の限界	投影が右端と一致
C	静的なつり合いが不可能	投影が外側

注意

支持範囲と重心の鉛直線だけで判定できるのは、ここで定めた外力条件のもとである。

水平方向に押す力などが加わっている場合には、その力のモーメントも考える必要がある。重心の鉛直線が支持範囲の内部にあっても、転倒する場合がある。

5. 箱を横から押すと、なぜ転倒するのか

床に置いた箱を横から押すことを考える。

押す力が小さいうちは、箱は動かずに静止できる。しかし、押す力を大きくすると、やがて箱の端を中心に転倒しようとする。

このとき、重心の鉛直線が箱の中央にあっても転倒することがある。重力だけでなく、外から押す力にもモーメントがあるためである。

5.1 滑らない箱の力のつり合い

水平な床の上に、幅b、重量Wの一様な直方体を置く。

箱の重心は底面の中央の真上にあり、底面からの高さは箱の高さの半分である。箱は初め静止している。

箱の左側面を、床から高さhの位置で、右向きに力Fで押す。

ここでは床との静止摩擦が十分に大きく、**箱は滑らない**と仮定する。

右向きを正とすると、水平につり合うためには左向きの静止摩擦力fが必要である。

$$F - f = 0$$

よって、

$$f = F$$

である。

鉛直方向については、上向きの垂直抗力の合力をNとして、

$$N - W = 0$$

すなわち、

$$N = W$$

となる。

これらは合力のつり合いであるが、まだモーメントのつり合いを確認していない。

5.2 床の抗力の作用位置が移動する

押す力Fは、高さhの位置にはたらくため、箱を時計回りに回そうとする。

その効果を打ち消すため、床の垂直抗力の合力の作用位置は、底面中央から右側へ移動する。

底面中央から右向きに測った抗力の作用位置をdとする。

底面中央まわりでモーメントのつり合いを考えると、

$$Nd - Fh = 0$$

である。重力は底面中央の真上にはたらき、床面に沿う摩擦力の作用線は底面中央を通るので、この点まわりのモーメントは 0 である。

$N = W$より、

$$d = \frac{Fh}{W}$$

となる。

押す力Fが大きいほど、床からの抗力の作用位置は右側へ移動する。

しかし、作用位置は箱の底面の右端を越えられない。

5.3 転倒の限界条件

箱の底面の右端までの距離は、中央から$\frac{b}{2}$である。

したがって、転倒の限界では、

$$d = \frac{b}{2}$$

となる。

先ほどの関係へ代入すると、

$$\frac{Fh}{W}=\frac{b}{2}$$

である。

よって、

$$Fh=W\frac{b}{2}$$

となる。

この式は、右下端まわりで考えると理解しやすい。右向きの押す力は時計回り、重力は反時計回りのモーメントをつくる。

両者が等しくなると、箱は転倒の限界となる。

水平押力による転倒の限界

$$F_{\text{crit}}=\frac{Wb}{2h}$$

ここで、

- F_{crit}：転倒の限界となる水平押力
- W：箱の重量
- b：箱の底面の幅
- h：押す力の作用高さ

である。

この式は、一様な箱を重心が中央にある状態で水平に押し、十分な静止摩擦によって滑らない場合の関係である。

摩擦が不足していると、転倒する前に箱が滑る場合がある。そのため、滑るか転倒するかは一般には別の判定が必要である。

4

水平な床の上に、重量100 N、底面の幅0.60 m、高さ1.0 mの一様な直方体の箱が置かれている。

箱の重心は中央にあり、底面から0.50 mの高さである。

箱の左側面の床から0.80 mの高さに、右向きの水平な力Fを加える。箱は初め静止しており、床との静止摩擦は十分に大きく、滑らないものとする。

(1) $F=0$ Nのとき、床から受ける垂直抗力の合力と摩擦力を求めよ。

(2) 転倒の限界となる力F_{crit}を求めよ。

(3) 転倒の限界で、床からの垂直抗力と摩擦力の大きさ・向き・作用位置を説明せよ。

(4) 重心の鉛直線が底面中央を通っていても、水平に押すことで転倒し得る理由を説明せよ。

解説

(1) 水平な押力がないとき、鉛直方向には重力100 Nと、床からの垂直抗力がはたらく。

$$N = 100\,\mathrm{N}$$

水平方向の外力がないので、摩擦力は、

$$f = 0\,\mathrm{N}$$

である。

このとき、床の垂直抗力の合力の作用位置は底面中央でよい。

(2) 右下端まわりでモーメントを考える。

箱の重心から右下端までの水平距離は、

$$\frac{0.60\,\mathrm{m}}{2} = 0.30\,\mathrm{m}$$

である。

押す力と重力のモーメントが等しくなるとき、

$$F_{\mathrm{crit}} \times 0.80\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N} \times 0.30\,\mathrm{m}$$

したがって、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{crit}} &= \frac{100\,\mathrm{N} \times 0.30\,\mathrm{m}}{0.80\,\mathrm{m}} \\ &= \frac{30\,\mathrm{N\,m}}{0.80\,\mathrm{m}} \\ &= 37.5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

(3) 鉛直方向のつり合いから、

$$N = 100\,\mathrm{N}$$

である。

水平方向のつり合いから、静止摩擦力は左向きに、

$$f = 37.5\,\mathrm{N}$$

はたらく。

転倒限界では、床から受ける接触力の合力の作用位置は右下端に達する。

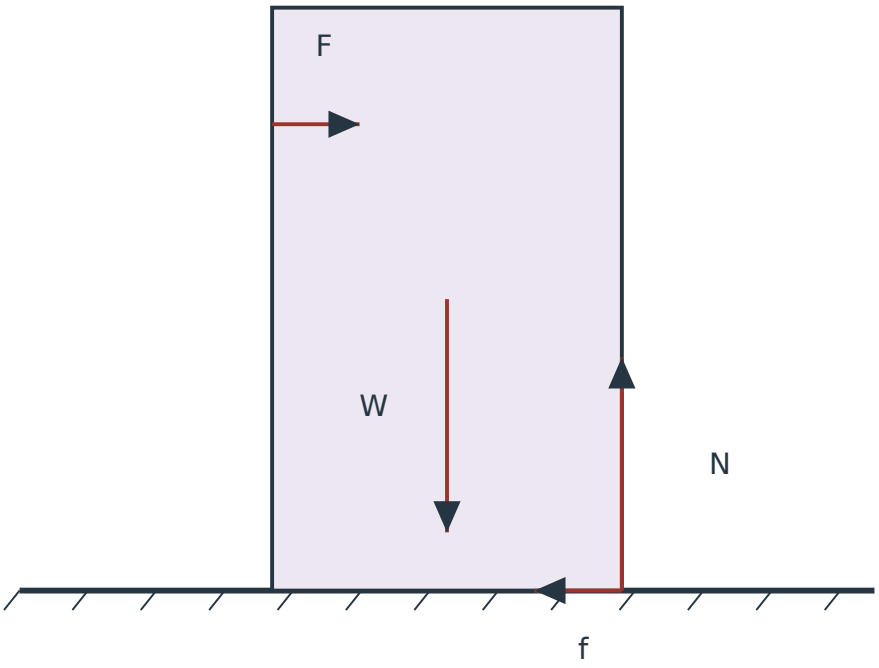


図 3　滑らずに静止している箱の転倒限界。右下端に床からの垂直抗力と左向き摩擦力が作用する。重量 100N、右向き押力 37.5N、抗力 100N、摩擦力 37.5N。全矢印は共通の力尺度 1.2px/N。

図では箱の右下端が転倒の支点となる限界状態を示している。Wは中央の重力、Fは左側面の高さ0.80 mに加えた押力である。

Nとfは、床との接触による力を右下端にまとめたものである。箱はまだ水平な姿勢であり、実際に傾いた後の図ではない。

(4) 重心の鉛直線が底面中央を通っていても、外から加えた水平押力は右下端まわりに時計回りのモーメントをつくる。

押す力が限界値に達すると、床の抗力の作用位置は右下端となる。さらに押す力を増やした場合には、底面内の抗力だけではモーメントを打ち消せなくなる。

したがって、重心の鉛直線が底面の内部にあっても、水平押力によって転倒し得る。

ポイント

水平に押す箱では、次の 2 つを区別する。

- 重力だけに注目する支持範囲の判定
- 押す力のモーメントも含める転倒の判定

押す力があるときには、重心の位置だけで転倒の有無を決められない。

6. 重心の高さと支持幅は安定性にどう関係するか

幅の広い台と細い台では、同じように傾けても倒れやすさが異なる。

この違いは、重心から下ろした鉛直線が支持範囲の端へ達するまでに、どれだけ傾けられるかによって説明できる。

6.1 傾きによる転倒限界

底面の幅がb、重心の高さがh_Gの物体を考える。重心は底面中央の真上にある。

物体を右下端を支点として、ゆっくり時計回りに角度θだけ傾ける。支点は動かず、物体の形は変わらないものとする。

初めは、重心が右下端より左側にある。このとき、重力は物体を元の姿勢へ戻す向きのモーメントをつくる。

傾きが大きくなると、重心の鉛直線が右下端へ近づく。

転倒の限界では、重心が右下端の真上に来る。

このとき、傾ける前の重心と右下端の位置関係からできる直角三角形について、

$$\tan\theta = \frac{\frac{b}{2}}{h_G}$$

が成り立つ。

$\tan\theta$は、直角三角形における角度θの対辺の長さを隣辺の長さで割った値である。

したがって、転倒限界の傾きは、底面幅の半分と重心の高さの比で決まる。

6.2 重心が低いと倒れにくい理由

底面幅bを同じに保ったまま重心の高さh_Gを小さくすると、比$\frac{\frac{b}{2}}{h_G}$は大きくなる。

角度が$0^\circ \le \theta < 90^\circ$の範囲では、$\tan\theta$は角度とともに大きくなる。

そのため、重心が低い物体の方が、重心の鉛直線が支持端へ達するまでに大きく傾けられる。

同様に、重心の高さを固定して支持幅を広げると、転倒限界の角度は大きくなる。

ただし、これは同じ方向への傾きについて、支持の条件などをそろえた比較である。「重心が低ければ、どのような外力に対しても必ず安定する」という意味ではない。

5

底面幅がともに0.60 mで、外形と重量が同じ 2 つの箱 A、B を考える。内部の質量分布だけが異なり、重心の高さは次のとおりである。

箱	重心の高さ
A	0.50 m
B	0.25 m

どちらも重心は底面中央の真上にあり、水平な床の上で初め静止している。

右下端を支点として滑らず、外から力を加えてゆっくり時計回りに傾ける。支点は動かないものとする。各角度で静かに保持した後、その外力を取り除いたときに、重力が元へ戻す向きにはたらくか、転倒させる向きにはたらくかの境界を転倒限界とする。

(1) それぞれの転倒限界での$\tan\theta$を求めよ。

(2) どちらの箱がより大きな角度まで傾けられるか、理由とともに答えよ。

解説

(1) 底面幅の半分は、

$$\frac{0.60\,\mathrm{m}}{2} = 0.30\,\mathrm{m}$$

である。

箱 A について、

$$\begin{aligned}\tan\theta_A &= \frac{0.30\,\mathrm{m}}{0.50\,\mathrm{m}} \\ &= 0.60\end{aligned}$$

となる。

箱 B について、

$$\begin{aligned}\tan\theta_B &= \frac{0.30\,\mathrm{m}}{0.25\,\mathrm{m}} \\ &= 1.20\end{aligned}$$

である。

(2) $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$の範囲では$\tan\theta$が大きいほど$\theta$も大きいため、

$$\theta_B > \theta_A$$

となる。

角度の近似値を示すと、

$$\theta_A \approx 30.96^\circ$$

$$\theta_B \approx 50.19^\circ$$

である。

したがって、より大きな角度まで傾けられるのは箱 B である。

箱 B は箱 A より重心が低いため、傾けても重心の鉛直線が右下端に達するまでの角度が大きい。

演習問題

1

平面内の剛体のつり合いについて考える。いずれも物体は初め静止し、指定した外力以外の力は考える運動に影響しないものとする。

(1) 薄い剛体の板に、水平方向で大きさが等しく反対向きの 2 力を加える。上側の点には右向き8.0 N、その真下0.40 mの点には左向き8.0 Nの力が作用する。2 力の合力を求めよ。

(2) 下側の力の作用点まわりで、この 2 力の合モーメントを求めよ。反時計回りを正とする。

(3) この板に静止のつり合いは成立するか。理由を説明せよ。

(4) 自由に動ける別の剛体に、1 つの点で右向きの力5.0 Nだけを加える。その作用点まわりのモーメントが 0 であることから、物体全体が静止し続けると判断してよいか。説明せよ。

2

長さ3.0 m、重量60 Nの一様な水平棒 AB を、左端 A と右端 B で下から支えて静止させる。

棒自身の重力は中央にはたらき、A から右へ2.0 mの位置に、下向きの力30 Nを加える。

A と B の支持反力をそれぞれR_A、R_Bとし、支持点からは上向きの力がはたらくものとする。

(1) 棒にはたらく外力をすべて挙げ、鉛直方向のつり合いの式を立てよ。

(2) A まわりのモーメントのつり合いを用いて、R_Bを求めよ。

(3) R_Aを求めよ。

(4) 求めた値を用い、作用点と力の向きを示す全力図を描け。さらに B まわりのモーメントがつり合うことを確認せよ。

3

質量を無視できる棒に、2 つの小さな物体を固定する。

一方の質量は$4.0\,\mathrm{kg}$で位置は$x = -0.20\,\mathrm{m}$、もう一方の質量は$2.0\,\mathrm{kg}$で位置は$x = 1.0\,\mathrm{m}$である。

x軸の正方向は右向きとし、重力加速度の大きさは$10\,\mathrm{m/s^2}$とする。

(1) 全体の重心の位置x_Gを求めよ。

(2) 重心まわりで、それぞれの重力がつくるモーメントを求め、打ち消し合うことを確認せよ。

(3) この例から、重心は 2 つの物体の位置の単純な中点になるとは限らない理由を説明せよ。

4

水平な支持面の支持範囲を、$x = -0.30\,\mathrm{m}$から$x = 0.30\,\mathrm{m}$とする。

3 つの異なる構成物体 P、Q、R について、重心の鉛直投影の位置が次のように与えられている。

物体	鉛直投影の位置
P	$x = -0.10\,\mathrm{m}$
Q	$x = 0.30\,\mathrm{m}$
R	$x = 0.42\,\mathrm{m}$

物体はいずれも初め静止し、重力と水平な支持面からの力以外の外力は作用しない。支持面は物体を引っ張れないものとする。

(1) P、Q、R を、静的なつり合いが可能・転倒の限界・静的なつり合いが不可能の 3 つに分類せよ。

(2) R について、右端まわりで重力がどちら向きのモーメントをつくるか答えよ。

(3) 支持面の垂直抗力が負の値になれないことが、転倒の判断にどのように関係するか説明せよ。

5

重量$120\,\mathrm{N}$、底面幅$0.50\,\mathrm{m}$の一様な直方体の箱が、水平な床に置かれている。

箱の重心は底面中央の真上にあり、箱は初め静止している。

箱の左側面に床から高さ$0.75\,\mathrm{m}$の位置で、右向きの水平な力Fを加える。

床の静止摩擦は十分に大きく、箱は滑らないものとする。

(1) $F = 30\,\mathrm{N}$を加えて箱が静止しているとき、床から受ける垂直抗力の合力Nと摩擦力fの大きさ・向きを求めよ。

(2) このとき、底面中央から右向きに測った垂直抗力の合力の作用位置dを求めよ。

(3) 転倒の限界となる力F_{crit}を求めよ。

(4) (3)の限界では、床からの抗力の作用位置はどこか。また、その限界に達しただけで箱が必ず回転を始めるといえるか、説明せよ。

6

底面中央の真上に重心がある、重量と重心の高さが等しい 2 つの剛体 A、B を考える。

底面幅は A が0.60 m、B が0.80 mである。重心の高さはどちらも0.40 mである。

どちらも初め静止しており、右下端を支点として滑らずにゆっくり傾ける。支点は動かないものとする。

(1) A、B の転倒限界について、それぞれ$\tan\theta$を求めよ。

(2) より大きな角度まで傾けられるのはどちらか。その理由を説明せよ。

(3) 「重心が低ければ、水平にどれだけ強く押しても転倒しない」という主張は正しいか。これまで学んだ条件を使って説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 右向きを正とすると、合力は、

$$8.0\,\mathrm{N} - 8.0\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N}$$

である。

(2) 下側の力の作用点まわりで考えると、下側の力のモーメントは 0 である。

上側の右向きの力は時計回りのモーメントをつくるため、

$$\begin{aligned} M &= -8.0\,\mathrm{N} \times 0.40\,\mathrm{m} \\ &= -3.2\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$

となる。

(3) 静止のつり合いは成立しない。

合力は 0 であるが、合モーメントは$-3.2\,\mathrm{N\,m}$であり 0 ではない。したがって、回転の状態が変化する。

(4) 静止し続けるとは判断できない。

力の作用点まわりのモーメントは 0 であっても、合力は右向き$5.0\,\mathrm{N}$である。自由に動ける物体では並進運動の状態が変化する。

剛体の静止を判断するには、合力と合モーメントの両方を確認する必要がある。

2

(1) 棒にはたらく外力は次の 4 つである。

- 左端 A から上向きの支持反力R_A
- 右端 B から上向きの支持反力R_B
- 棒の中央に下向きの重力$60\,\mathrm{N}$
- A から$2.0\,\mathrm{m}$の位置に下向きの力$30\,\mathrm{N}$

上向きを正として、

$$R_A + R_B - 60\,\mathrm{N} - 30\,\mathrm{N} = 0$$

より、

$$R_A + R_B = 90\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) A まわりで反時計回りを正とする。

棒自身の重力は中央、すなわち A から1.5 mの位置にはたらく。

$$\begin{aligned} 0 = R_B \times 3.0\,\mathrm{m} \\ -60\,\mathrm{N} \times 1.5\,\mathrm{m} \\ -30\,\mathrm{N} \times 2.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} R_B \times 3.0\,\mathrm{m} &= 90\,\mathrm{N\,m} + 60\,\mathrm{N\,m} \\ &= 150\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$

より、

$$R_B = \frac{150\,\mathrm{N\,m}}{3.0\,\mathrm{m}} = 50\,\mathrm{N}$$

である。

(3) 鉛直方向のつり合いから、

$$\begin{aligned} R_A &= 90\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} \\ &= 40\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

(4) 求めた反力を入れた全力図は次のとおりである。

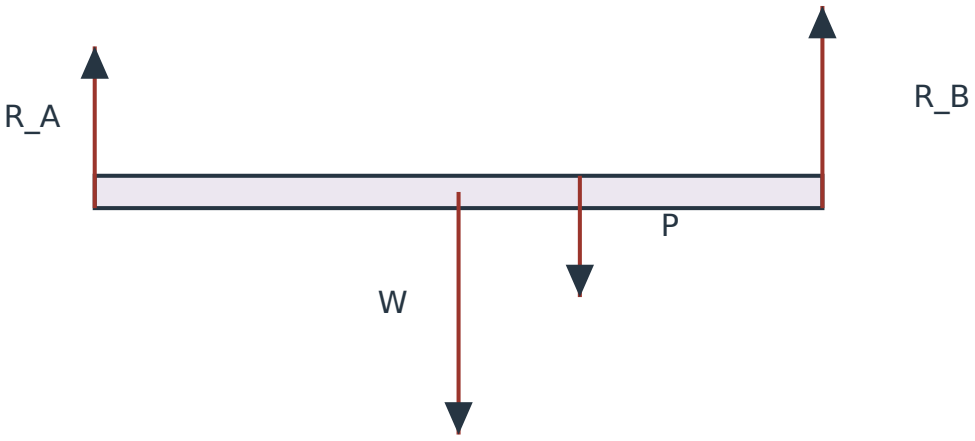


図 4　長さ 3.0m の棒の全力図。左 A で 40N、右 B で 50N の上向き反力、中央で 60N の重力、A から 2.0m の位置で 30N の下向き外力が作用する。矢印の共通尺度は 2px/N。

図の左端は A、右端は B であり、$W = 60\,\mathrm{N}$、$P = 30\,\mathrm{N}$である。すべての力の作用点を問題の位置に合わせている。

B まわりでモーメントを確認すると、

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 60\,\mathrm{N}\times 1.5\,\mathrm{m}\\ &\quad +30\,\mathrm{N}\times 1.0\,\mathrm{m}\\ &\quad -40\,\mathrm{N}\times 3.0\,\mathrm{m}\\ &= 90\,\mathrm{N\,m}+30\,\mathrm{N\,m}\\ &\quad -120\,\mathrm{N\,m}\\ &= 0\,\mathrm{N\,m}\end{aligned}$$

となり、モーメントもつり合う。

また、両反力が正であるため、支持点が棒を上向きに押すという条件とも一致している。

3

(1) 重心の式に代入する。

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{4.0\,\mathrm{kg} \times (-0.20\,\mathrm{m}) + 2.0\,\mathrm{kg} \times 1.0\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{kg} + 2.0\,\mathrm{kg}} \\ &= \frac{-0.80\,\mathrm{kg\,m} + 2.0\,\mathrm{kg\,m}}{6.0\,\mathrm{kg}} \\ &= 0.20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

したがって、重心は$x = 0.20\,\mathrm{m}$である。

(2) 左の質量4.0 kgに働く重力は、

$$4.0\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m/s^2} = 40\,\mathrm{N}$$

右の質量2.0 kgに働く重力は、

$$2.0\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m/s^2} = 20\,\mathrm{N}$$

である。

重心から左の物体までの距離は、

$$0.20\,\mathrm{m} - (-0.20\,\mathrm{m}) = 0.40\,\mathrm{m}$$

右の物体までの距離は、

$$1.0\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} = 0.80\,\mathrm{m}$$

である。

反時計回りを正とすると、左側の重力のモーメントは、

$$40\,\mathrm{N} \times 0.40\,\mathrm{m} = 16\,\mathrm{N\,m}$$

右側の重力のモーメントは、

$$-20\,\mathrm{N} \times 0.80\,\mathrm{m} = -16\,\mathrm{N\,m}$$

となる。

合モーメントは、

$$16\,\mathrm{N\,m} - 16\,\mathrm{N\,m} = 0\,\mathrm{N\,m}$$

であり、打ち消し合う。

(3) 重心は各部分の質量を考慮して決まるため、質量が等しくない場合には、2 つの位置の単純な中点とは限らない。

今回の重心は、より重い左側の物体に近い位置にある。

4

(1) 支持範囲は$-0.30\,\mathrm{m} \le x \le 0.30\,\mathrm{m}$である。

物体	投影位置	判定
P	$-0.10\,\mathrm{m}$	静的なつり合いが可能
Q	$0.30\,\mathrm{m}$	転倒の限界
R	$0.42\,\mathrm{m}$	静的なつり合いが不可能

P は内部、Q は右端、R は右端の外側にある。

(2) R の重心の鉛直線は支持範囲の右側にある。

したがって、右端まわりの重力のモーメントは時計回りである。

(3) 床の垂直抗力は物体を上向きに押せるが、下向きに引っ張ることはできない。

重心の鉛直線が支持範囲の外側にある場合、重力と同じ作用線上に上向きの抗力を置くことができない。また、支持範囲内の抗力だけでは重力による転倒モーメントを打ち消せない。

したがって、重力と支持面の力だけでは静的なつり合いは成立しない。

5

(1) 鉛直方向には上向きの垂直抗力と下向きの重力がはたらく。

$$N - 120\,\mathrm{N} = 0$$

より、

$$N = 120\,\mathrm{N}$$

となる。

水平方向では、右向きの押力$30\,\mathrm{N}$と左向きの摩擦力がつり合う。

したがって、摩擦力は左向き$30\,\mathrm{N}$である。

(2) 底面中央まわりでモーメントのつり合いを考えると、

$$Nd = Fh$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} d &= \frac{Fh}{N} \\ &= \frac{30\,\mathrm{N} \times 0.75\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{N}} \\ &= \frac{22.5\,\mathrm{N\,m}}{120\,\mathrm{N}} \\ &= 0.1875\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

垂直抗力の合力は底面中央から右へ$0.1875\,\mathrm{m}$の位置にはたらく。

この位置は右端までの距離$0.25\,\mathrm{m}$より小さいため、まだ支持範囲の内部にある。

(3) 転倒の限界条件は、

$$F_{\mathrm{crit}} h = W \frac{b}{2}$$

である。

これに代入すると、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{crit}} &= \frac{120\,\mathrm{N} \times 0.25\,\mathrm{m}}{0.75\,\mathrm{m}} \\ &= \frac{30\,\mathrm{N\,m}}{0.75\,\mathrm{m}} \\ &= 40\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

(4) $F = 40\,\mathrm{N}$のとき、床の垂直抗力の作用位置は底面中央から右へ$0.25\,\mathrm{m}$、すなわち右下端に達する。

限界に達したことだけで、必ず回転を始めるとはいえない。

理想的な限界状態では、右下端まわりのモーメントがちょうど打ち消し合っており、静止のつり合いが成立し得る。

押す力を限界よりさらに大きくすると、支持範囲内の抗力ではモーメントを打ち消せなくなり、滑らないという条件のもとでは箱が転倒する方向へ動き始める。

6

(1) 転倒限界では、

$$\tan\theta = \frac{\frac{b}{2}}{h_G}$$

である。

A について、

$$\begin{aligned}\tan\theta_A &= \frac{0.60\,\mathrm{m}\,\frac{1}{2}}{0.40\,\mathrm{m}} \\ &= \frac{0.30\,\mathrm{m}}{0.40\,\mathrm{m}} \\ &= 0.75\end{aligned}$$

B について、

$$\begin{aligned}\tan\theta_B &= \frac{0.80\,\mathrm{m}\,\frac{1}{2}}{0.40\,\mathrm{m}} \\ &= \frac{0.40\,\mathrm{m}}{0.40\,\mathrm{m}} \\ &= 1.0\end{aligned}$$

である。

(2) $\tan\theta_B > \tan\theta_A$なので、転倒限界の傾きは B の方が大きい。

2 つの物体は重心の高さが等しいが、B の方が底面幅が広い。

したがって、B は重心の鉛直線が右下端に達するまでに、より大きく傾けられる。

(3) 正しくない。

重心が低いほど転倒限界の傾きが大きくなるという比較は、支持幅や外力の条件をそろえた場合に成り立つ。

水平な押力がある場合には、その力によるモーメントも加わる。押力の大きさや作用高さによっては、重心が低い物体でも転倒する。

したがって、安定性を判断するときには、重心の位置だけでなく、支持範囲、外力の作用点、力の大きさ、滑るかどうかなどを区別して調べる必要がある。

©ミライコーチング