

第 32 講 二次関数の最大・最小

学習目標

- ・ 定義域が実数全体の二次関数について、グラフの開く向きから最大値・最小値の有無を判断できる。
- ・ $y = a(x - p)^2 + q$ の形から、頂点を利用して最大値または最小値を求められる。
- ・ 一般の二次関数を平方完成して、最大値または最小値を求められる。
- ・ 値だけでなく、その値をとる x も答えられる。

最大・最小はグラフの「いちばん高い・低い」を見る

計算する前に開く向きを確認する

二次関数

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

を考えます。

$(x - 2)^2$ は 2 乗なので、どんな実数 x に対しても 0 以上です。

したがって、 y は 1 より小さくなりません。

$x = 2$ のとき $(x - 2)^2 = 0$ となるので、このとき $y = 1$ です。

つまり、この関数で最も小さい値は 1 です。

一方、 x を大きくしたり小さくしたりすると $(x - 2)^2$ はどこまでも大きくできるので、 y に最大値はありません。

二次関数の最大・最小では、計算だけでなく、**グラフが上に開くか下を開くか**を最初に見ることが重要です。

最大値と最小値

関数がある値のうち、最も大きい値を**最大値**、最も小さい値を**最小値**といいます。
最大値や最小値を答えるときは、その値をとる x も確認します。

上に開く放物線では頂点が最も低い

$a > 0$ の場合

二次関数

$$y = a(x - p)^2 + q$$

で $a > 0$ とします。

$(x - p)^2 \geq 0$ なので、

$$a(x - p)^2 \geq 0$$

です。

したがって、 $y \geq q$ です。

等号が成り立つのは $(x - p)^2 = 0$ 、つまり $x = p$ のときです。

よって、上に開く放物線では、頂点 (p, q) が最も低い点になります。

上に開くとき

$a > 0$ のとき、 $y = a(x - p)^2 + q$ は $x = p$ で最小値 q をとります。
定義域が実数全体なら、最大値はありません。

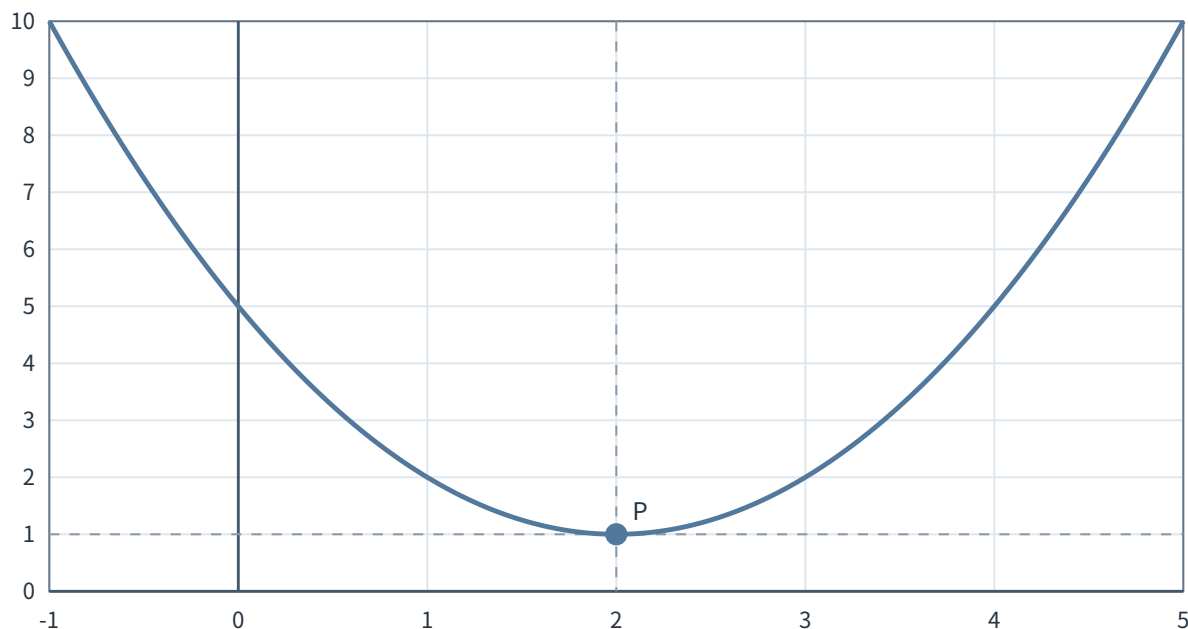


図1 上に開く放物線では頂点が最も低い

下に開く放物線では頂点が最も高い **$a < 0$ の場合**

二次関数

$$y = a(x - p)^2 + q$$

で $a < 0$ とします。

$(x - p)^2 \geq 0$ ですが、負の数 a を掛けるので、

$$a(x - p)^2 \leq 0$$

です。

したがって、 $y \leq q$ です。

等号が成り立つのは $x = p$ のときです。

よって、下に開く放物線では、頂点 (p, q) が最も高い点になります。

下に開くとき

$a < 0$ のとき、 $y = a(x - p)^2 + q$ は $x = p$ で最大値 q をとります。
定義域が実数全体なら、最小値はありません。

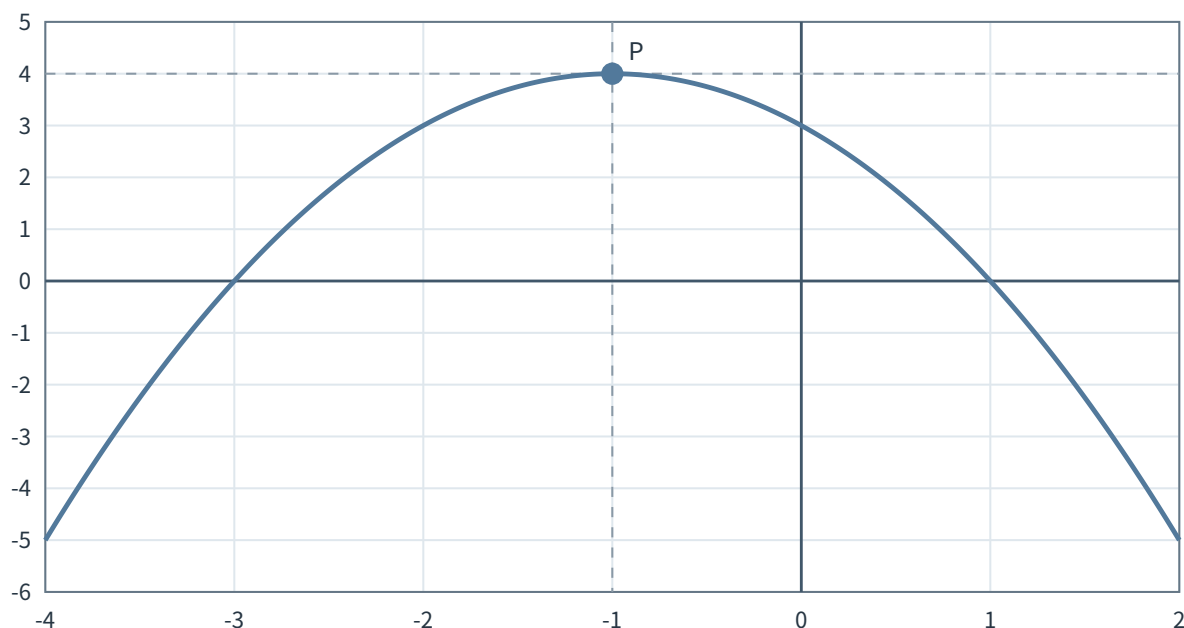


図2 下に開く放物線では頂点が最も高い

最大値と最小値を判断する手順

実数全体での基本手順

定義域が実数全体の二次関数では、次の順に考えます。

1. 必要なら平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ の形にする。
2. a の符号から、上に開くか下に開くか判断する。
3. 頂点 (p, q) を読む。
4. 上に開くなら最小値、下に開くなら最大値を頂点から求める。
5. その値をとる $x = p$ も答える。
6. 反対側には値がどこまでも広がるため、最大値または最小値が存在しないことを確認する。

最大値と最小値を両方あるものとして探さない

定義域が実数全体なら、上に開く二次関数は上方向へどこまでも続きます。

したがって、最小値はありますが最大値はありません。

下に開く二次関数では反対に、最大値はありますが最小値はありません。

この講では、 x の範囲が制限された場合は扱いません。

平方完成して頂点を見つける

一般の式ではまず頂点が読める形へ直す

二次関数

$$y = x^2 - 6x + 7$$

を考えます。

平方完成すると、

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

です。
係数は正なのでグラフは上に開きます。
したがって、頂点 $(3, -2)$ が最も低い点です。
よって、 $x = 3$ のとき最小値 -2 をとり、最大値はありません。

頂点の y 座標だけ答えて終わらない

「最小値を求めなさい」と聞かれたら、値だけでなく、その値をとる x も確認します。
たとえば $y = (x - 3)^2 - 2$ なら、「 $x = 3$ のとき最小値 -2 」と整理します。

例題

例題 1

二次関数

$$y = 2(x - 4)^2 + 3$$

の最大値・最小値を調べなさい。

例題 1 の解答・解説

$a = 2 > 0$ なので、グラフは上に開きます。
頂点は $(4, 3)$ です。
したがって、 $x = 4$ のとき最小値 3 をとります。
上方向へはどこまでも値が大きくなるので、最大値はありません。

例題 2

二次関数

$$y = -3(x + 2)^2 + 5$$

の最大値・最小値を調べなさい。

例題 2 の解答・解説

$a = -3 < 0$ なので、グラフは下に開きます。
 $x + 2 = 0$ より頂点は $(-2, 5)$ です。
したがって、 $x = -2$ のとき最大値 5 をとります。
下方向へはどこまでも値が小さくなるので、最小値はありません。

例題 3

二次関数

$$y = x^2 + 4x - 1$$

の最大値・最小値を調べなさい。

例題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x + 2)^2 - 5$$

です。

$a = 1 > 0$ なので、グラフは上に開きます。

したがって、 $x = -2$ のとき最小値 -5 をとり、最大値はありません。

演習問題

練習問題 1

二次関数

$$y = (x - 3)^2 + 2$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 2

二次関数

$$y = -2(x - 1)^2 + 7$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 3

二次関数

$$y = x^2 - 8x + 10$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 4

二次関数

$$y = -x^2 - 6x + 4$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 5

二次関数

$$y = 2x^2 + 12x + 13$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 6

二次関数

$$y = -2x^2 + 8x - 3$$

の最大値・最小値を調べなさい。

練習問題 7

次の二次関数について、最大値または最小値を求めなさい。また、その値をとる x を答えなさい。

(1) $y = 4(x + 1)^2 - 6$

(2) $y = -5(x - 2)^2 + 1$

練習問題 8

ある生徒は、

$$y = x^2 - 4x + 8$$

について、「頂点があるので最大値と最小値の両方が存在する」と考えました。
この考えの誤りを説明し、正しい最大値・最小値を答えなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

$a = 1 > 0$ なので、グラフは上に開きます。
頂点は $(3, 2)$ です。
したがって、 $x = 3$ のとき最小値 2 をとります。
最大値はありません。

練習問題 2 の解答・解説

$a = -2 < 0$ なので、グラフは下に開きます。
頂点は $(1, 7)$ です。
したがって、 $x = 1$ のとき最大値 7 をとります。
最小値はありません。

練習問題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x - 4)^2 - 6$$

です。
グラフは上に開くので、 $x = 4$ のとき最小値 -6 をとります。
最大値はありません。

練習問題 4 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -(x + 3)^2 + 13$$

です。

グラフは下に開くので、 $x = -3$ のとき最大値 13 をとります。
最小値はありません。

練習問題 5 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = 2(x + 3)^2 - 5$$

です。

$a = 2 > 0$ なので、 $x = -3$ のとき最小値 -5 をとります。
最大値はありません。

練習問題 6 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -2(x - 2)^2 + 5$$

です。

$a = -2 < 0$ なので、 $x = 2$ のとき最大値 5 をとります。
最小値はありません。

練習問題 7 の解答・解説

- (1) $a = 4 > 0$ なので上に開きます。
したがって、 $x = -1$ のとき最小値 -6 をとります。
(2) $a = -5 < 0$ なので下に開きます。
したがって、 $x = 2$ のとき最大値 1 をとります。

練習問題 8 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x - 2)^2 + 4$$

です。

グラフは上に開くので、頂点 $(2, 4)$ が最も低い点です。

したがって、 $x = 2$ のとき最小値 4 をとります。

一方、 x を頂点から遠ざけると $(x - 2)^2$ はどこまでも大きくなるので、 y に最大値はありません。
頂点があることは、最大値と最小値の両方が存在することを意味しません。