第 035 講 反発係数と一次元衝突

この講でできるようになること

- 2 物体が接近・分離する速さを符号付き速度から求め、反発係数の意味を説明できる。
- 系・正方向・外力の力積を確認し、運動量保存則と反発係数を組み合わせて衝突後の速度を求められる。
- 弾性衝突・完全非弾性衝突の違いを運動エネルギーと相対速度から説明できる。
- 固定壁との衝突では、球単体の運動量が保存しないことと反発係数を使えることを区別できる。

基礎：衝突では何を比べるのか

滑らかな水平床の上で、動いている物体 A が物体 B に追いつき、正面から衝突する場面を考える。衝突前の速度が分かっていても、衝突後の速度はそれだけでは決まらない。

衝突によって A と B は互いに力を及ぼし合う。その結果、各物体の運動量は変化するが、A と B をまとめた系では、外力の力積を無視できる条件のもとで全運動量が保存する。

ただし、運動量保存則だけでは、衝突後の A と B の速度という 2 つの未知量を通常は決められない。そこで必要になるのが、**衝突前に互いに近づく速さと、衝突後に互いに離れる速さの関係**である。

1. 系・正方向・時間区間を固定する

本講の 2 物体の衝突では、特に断らない限り次の条件を用いる。

- 一直線上の滑らかな水平床を運動する。
- A が左側、B が右側にあり、A が B に追いついて正面衝突する。
- 右向きを正、左向きを負とする。
- A、B の質量をそれぞれm_A、m_Bとし、衝突の前後で変化しない。
- 衝突直前の速度をu_A, u_B、衝突直後の速度をv_A, v_Bとする。
- 衝突直前から直後までを比較し、この区間で A と B の系に働く水平外力の力積は無視できる。

外力の力積を無視する扱いは、要求される精度内での近似である。本講の 2 物体 A+B の計算では、系 A+B への水平外力の力積を 0 とする理想化モデルで運動量保存式を用いる。A 単体や固定壁に衝突する球単体については、外力の力積を別に判断する。

床からの垂直抗力と重力は鉛直方向につり合っている。この設定では、水平運動量について A と B の系を考えればよい。

衝突前後の速度の記号

物理量	物体 A	物体 B
質量	m_A	m_B
衝突直前の速度	u_A	u_B
衝突直後の速度	v_A	v_B

速度は向きを含む量である。右向きなら正、左向きなら負とし、静止していれば0とする。

2. 全運動量が保存する条件

第 033 講で学んだように、系の全運動量の変化は、その系が外部から受ける力積に等しい。

A と B をまとめた系に対して、衝突中の水平外力の力積を無視できるなら、水平全運動量は保存する。

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B$$

左辺は衝突直前、右辺は衝突直後の全運動量である。速度には正負の符号を付けて代入する。

A と B が互いに及ぼす衝突力は、この系では内部の力である。作用・反作用による力積が打ち消し合うため、全運動量の変化には寄与しない。

一方、A だけを系に選べば、B から受ける衝突力は外力となる。したがって、A 単体の運動量まで保存するわけではない。

保存則を使う前の判断

衝突の問題では、次の順に条件を確かめる。

1. **系**：どの物体をまとめて考えるか。
2. **方向**：どちらを正とするか。
3. **区間**：衝突直前から直後までのどの時間を比べるか。
4. **外力の力積**：考える方向で無視できるか。

「衝突時間が短い」という理由だけでは、運動量保存を断定できない。外力の力積を無視できる条件が必要である。

基礎：接近する速さと分離する速さ

3. 衝突前の接近の速さ

A が左、B が右にあるとき、A が B に追いついて衝突するには、A の速度が B の速度より大きい必要がある。

$$u_A > u_B$$

第 013 講で扱った相対速度を使うと、B から見た A の速度は$u_A - u_B$である。

この値が正なら、A は B に追いつく向きに動いている。そこで接近の速さを次のように表す。

$$\text{接近の速さ} = u_A - u_B > 0$$

2 物体が反対向きに動く場合だけでなく、同じ右向きに動く場合でも、左側の A の方が速ければ接近する。

4. 衝突後の分離の速さ

衝突後、A と B が再び近づかないためには、右側の B の速度が左側の A の速度以上であればよい。

$$v_B \geq v_A$$

したがって、分離の速さは次のようになる。

$$\text{分離の速さ} = v_B - v_A \geq 0$$

両方の物体が右向きに進んでいても、B の速度の方が大きければ間隔は広がる。反対に、$v_A = v_B$なら衝突直後の相対速度は0であり、直後には互いに離れる速さを持たない。

ここで重要なのは、**地面から見た各物体の速さではなく、2 物体の間隔が変わる速さ**を比較することである。

基礎：反発係数を定義する

5. 接近と分離の速さの比

衝突後に 2 物体がどの程度の速さで離れていくかを表す量を、反発係数という。反発係数はeで表す。

反発係数

反発係数eは、衝突直前の接近の速さに対する、衝突直後の分離の速さの比である。

$$e = \frac{v_B - v_A}{u_A - u_B}$$

ここでは A が左、B が右にあり、衝突直前に$u_A > u_B$を満たす場合を考える。

相対速度の向きをそろえて書けば、次の形にもなる。

$$e = -\frac{v_B - v_A}{u_B - u_A}$$

反発係数は速さどうしの比なので単位を持たない。

分母の$u_A - u_B$は正、分子の$v_B - v_A$は0以上である。したがって、この配置で実際に衝突して分離する通常の場面ではeは負にならない。

相対速度として B の A に対する速度を用いると、衝突直前は$u_B - u_A < 0$、衝突直後は$v_B - v_A \geq 0$となる。定義式に負号が現れるのは、接近と分離で相対速度の符号が反転するためである。

反発係数は、A の衝突前後の速さの比でも、B の衝突前後の速さの比でもない。

反発係数を使えない配置

A が左、B が右にあっても、$u_A = u_B$なら 2 物体の間隔は変わらない。このとき接近の速さは0であり、反発係数の定義式の分母が0になる。

また、$u_A < u_B$なら B が A から遠ざかるので、そのままでは新たな衝突は起こらない。

いずれも、衝突が起こる条件を確かめずに反発係数の式を機械的に使ってはならない。

6. 反発係数の値と衝突の種類

本講では、内部エネルギーの放出によって衝突後の相対速度が増加するような特殊な衝突を除き、通常の衝突として$0 \leq e \leq 1$を扱う。

反発係数	衝突の種類・特徴	衝突直後の相対速度
$e = 1$	弾性衝突	接近の速さと分離の速さが等しい
$0 < e < 1$	中間的な衝突	分離の速さが接近の速さより小さい
$e = 0$	完全非弾性衝突	分離の速さが0

$e = 1$では、水平外力の力積を無視できる一定質量の 2 物体系において、衝突前後の全運動エネルギーも保存する。

$0 < e < 1$では、この 2 物体系の運動エネルギーは減少し、その一部は変形や熱などに移る。運動量が保存しても運動エネルギーが保存するとは限らない。

©ミライコーチング

$e=0$では、衝突直後に$v_A=v_B$となる。しかし、同じ速度になったことだけで、2 物体が永久に接着したとは判断できない。問題で合体すると与えられた場合は、第 034 講の一体化モデルを用いる。

なお、$0 \le e \le 1$は本講で扱う通常の衝突の範囲であり、内部エネルギーの放出などを含むあらゆる実在の衝突に対する絶対的な制限ではない。

基礎：運動量保存則と反発係数を組み合わせる

7. 2 つの式で衝突後の速度を決める

衝突後の速度v_A, v_Bを求めるとき、反発係数だけでは通常は式が 1 本しか得られない。

水平外力の力積を無視できる 2 物体系なら、運動量保存則をもう 1 本の式として使える。

運動量保存則は

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B$$

である。

反発係数の式を変形すると、

$$v_B - v_A = e(u_A - u_B)$$

となる。

この 2 式を連立すれば、2 つの未知速度を求められる。答えが出たら、接近・分離の向きと運動量を確かめ、必要に応じて運動エネルギーも確認する。

例題 1

滑らかな水平床で、質量がともに$1\,\mathrm{kg}$の物体 A、B が正面衝突する。A は左側から右向きに$4\,\mathrm{m/s}$で進み、右側の B は静止している。

右向きを正とし、反発係数を$e=1$とする。衝突中の水平外力の力積は無視できる。

(1) 衝突後の A、B の速度をそれぞれ求めよ。

(2) 接近の速さと分離の速さを求めよ。

(3) 衝突前後の全運動量と全運動エネルギーを求め、保存される量を確認せよ。

解答・解説

(1) A と B を系に選び、右向きを正とする。水平外力の力積は無視できるため、全運動量が保存する。

$$(1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) + (1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})$$
$$= (1\,\mathrm{kg})v_A + (1\,\mathrm{kg})v_B$$

両辺を$1\,\mathrm{kg}$で割ると、

$$v_A + v_B = +4\,\mathrm{m/s}$$

となる。

反発係数は$e = 1$なので、

$$v_B - v_A = 1\{(+4\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s})\}$$
$$= +4\,\mathrm{m/s}$$

である。

2 式を連立すると、

$$v_A = 0\,\mathrm{m/s}, \qquad v_B = +4\,\mathrm{m/s}$$

を得る。

したがって、A は静止し、B が右向きに$4\,\mathrm{m/s}$で進む。

(2) 接近の速さは、

$$(+4\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s}) = 4\,\mathrm{m/s}$$

である。

分離の速さも、

$$(+4\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s}) = 4\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) 全運動量は衝突前後とも、

$$P = +4\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

衝突後は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。全運動量と全運動エネルギーがともに保存している。

この例では、等しい質量の 2 物体が弾性衝突し、衝突後に速度が交換された。ただし、質量が異なる場合まで速度が単純に交換されるわけではない。

8. 反対向きに進む物体の衝突

A が右向き、B が左向きに進んで互いに近づく場合も、符号付き速度を使えば同じ式で扱える。

B の速度が負なら、接近の速さ$u_A - u_B$では負の数を引くことになる。その結果、この配置では両物体の速さの和が接近の速さになる。

ただし、これは互いに向かい合っているから成り立つのであり、あらゆる衝突で速さを足せばよいわけではない。

例題 2

滑らかな水平床で、質量2 kgの物体 A が左から右向きに4 m/s、質量1 kgの物体 B が右から左向きに2 m/sで進み、正面衝突する。

右向きを正、反発係数を$e = 0.5$とする。A と B の系に働く水平外力の力積は無視できる。

(1) 衝突前の接近の速さを求めよ。

(2) 衝突後の A、B の速度を求めよ。

(3) 衝突前後の全運動量と全運動エネルギーを比較せよ。

解答・解説

(1) 右向きを正とすると、

$$u_A = +4\,\mathrm{m/s}, \qquad u_B = -2\,\mathrm{m/s}$$

である。

接近の速さは、

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= (+4\,\mathrm{m/s}) - (-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= 6\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

(2) A と B の全運動量が保存するため、

$$\begin{aligned} &(2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= (2\,\mathrm{kg})v_A + (1\,\mathrm{kg})v_B \end{aligned}$$

となる。

左辺は$+6\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

反発係数の関係から、

$$\begin{aligned} v_B - v_A &= 0.5(6\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

よって、

$$v_B = v_A + 3\,\mathrm{m/s}$$

を運動量保存式に代入すると、

$$\begin{aligned} &(2\,\mathrm{kg})v_A \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(v_A + 3\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

これを解いて、

$$v_A = +1\,\mathrm{m/s}$$

を得る。さらに、

$$v_B = +4\,\mathrm{m/s}$$

である。

衝突後は A も B も右向きに進むが、B の方が速いため、互いに離れていく。

(3) 衝突前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突後は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

全運動エネルギーは、衝突前が、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

衝突後が、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、全運動量は保存しているが、全運動エネルギーは9 J減少している。この差は、変形や熱などに移ったエネルギーに対応する。

次の 2 つの模式図では、衝突直前と直後の速度を矢印で比較する。矢印の長さは1 m/sを30 pxとして共通に表しており、物体間の距離や質量の比を表すものではない。

衝突直前の図では、矢印とラベルを読みやすくするために 2 物体を離して描いている。これは接触した瞬間の実際の間隔を表すものではない。

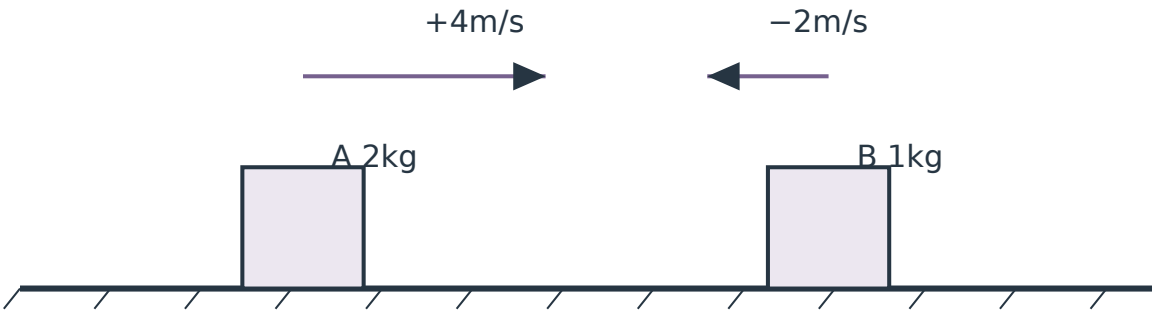

図 1　衝突前（例題 2）：A 2kg は+4m/s、B 1kg は−2m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。



図 2　衝突後（例題 2）：A 2kg は+1m/s、B 1kg は+4m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。

衝突前は A が右、B が左へ動き、2 物体が向かい合って接近する。衝突後は両方が右向きであっても、B の方が速いため分離する。

矢印は各物体の地面に対する速度を表す。接近や分離の速さは、矢印をそのまま別の物体に作用する力として扱うのではなく、速度の差から求める。

9. 完全非弾性衝突ではどうなるか

反発係数が$e = 0$のとき、

$$v_B - v_A = 0$$

であるから、

$$v_A = v_B$$

となる。

つまり、衝突直後に 2 物体は共通の速度を持つ。

A と B の系で水平外力の力積を無視できるなら、共通速度vは運動量保存則から、

$$v = \frac{m_A u_A + m_B u_B}{m_A + m_B}$$

と求められる。

これは第 034 講で扱った合体後の共通速度と同じ形である。ただし、完全非弾性衝突という条件だけでは永久に一体となることまでは意味しない。

例題 3

滑らかな水平床で、質量1 kgの物体 A が左から右向きに3 m/s、質量3 kgの物体 B が右から左向きに1 m/sで進み、正面衝突する。

右向きを正、反発係数を$e = 0$とする。A と B の系に働く水平外力の力積は無視できる。

(1) 衝突直後の A、B の速度を求めよ。

(2) 衝突前後の全運動量を求めよ。

(3) 衝突前後の全運動エネルギーを求め、運動量との違いを説明せよ。

解答・解説

(1) $e = 0$より、衝突直後には A と B の速度が等しい。

$$v_A = v_B = v$$

運動量保存則から、

$$\begin{aligned}&(1\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s})\\&\quad +(3\,\mathrm{kg})(-1\,\mathrm{m/s})\\&= (1\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg})v\end{aligned}$$

となる。

左辺は0 kg m/sであるから、

$$v = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、衝突直後には両物体とも静止する。

(2) 衝突前の全運動量は、

$$\begin{aligned}P_{\text{前}} &= (1\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s})\\&\quad +(3\,\mathrm{kg})(-1\,\mathrm{m/s})\\&= 0\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

である。

衝突後も両物体が静止しているため、

$$P_{\text{後}} = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

(3) 衝突前の全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(3\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 4.5\,\mathrm{J} + 1.5\,\mathrm{J} \\ &= 6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

衝突後は両物体が静止しているため、

$$K_{\text{後}} = 0\,\mathrm{J}$$

となる。

このように、全運動量が0でも、衝突前の全運動エネルギーが0とは限らない。運動量には向きがあり、正負が打ち消し合うが、運動エネルギーは各物体について0以上だからである。

この例では全運動エネルギーが6 J減少している。ただし、一般の$e = 0$の衝突で衝突後の運動エネルギーが必ず0になるわけではない。

一次元衝突の基本手順

1. 衝突する物体を系に選び、左右配置と正方向を固定する。
2. 系への外力の力積を確認し、全運動量を保存できるか判断する。
3. 符号付き速度から、衝突前の接近の速さを求める。
4. 反発係数の式と、条件が成立する場合の運動量保存式を連立する。
5. 衝突後の速度の符号と分離の速さを確かめる。
6. 必要に応じて全運動量・全運動エネルギーを計算し、結果を解釈する。

反発係数の関係は接近・分離の相対速度を表すものであり、運動量保存則とは役割が異なる。

発展：系による保存可否の違い

10. 固定壁に衝突する球

ここまで扱ったのは、A と B を合わせた系で水平外力の力積を無視できる 2 物体の衝突であった。次に、動いている球が固定された壁に衝突する場合を考える。

この比較には、第 013 講の相対速度と、第 033 講の系・外力の判断を用いる。

固定壁を右側に置き、球が左から右向きに衝突するとする。右向きを正とし、壁の速度を0、球の入射速度を$u > 0$、反射速度をvとする。

壁は動かないため、球の衝突前の接近の速さはu、反射後の分離の速さは$-v$である。

したがって、

$$e = \frac{-v}{u}$$

より、

$$v = -eu$$

となる。

球が反射するとき、速度vは負である。

11. 球単体の運動量は保存しない

固定壁との衝突で球だけを系に選ぶと、壁が球に及ぼす力は外力である。球は壁から力積を受けるので、球単体の運動量は一般に保存しない。

一方、反発係数は球と壁の接近・分離の速さを比較する量である。その定義に、球単体の運動量保存は必要ない。

固定壁と 2 物体の衝突を混同しない

固定壁の問題では、壁の速度を0とする。

球と壁を、勝手に有限の質量を持つ 2 物体へ置き換え、球単体に運動量保存則を適用してはならない。

運動量が保存するかどうかは系と外力の条件で決まり、反発係数を使えるかどうかとは別の判断である。

演習問題

基礎：系・方向・保存条件と反発係数

演習 1

図から判断する衝突

滑らかな水平床上で、質量がともに1 kgの物体 A、B が 1 回の正面衝突をする。

A は左、B は右にあり、右向きを正とする。衝突直前から直後まで、A と B をまとめた系に働く水平外力の力積は無視できる。

次の 2 つの図は、衝突直前と直後の速度をそれぞれ示している。矢印の長さはどちらの図も 1 m/sを30 pxとする。位置と物体間の距離は模式的に表したものであり、衝突前の図は読みやすさのため 2 物体の間隔を広げている。

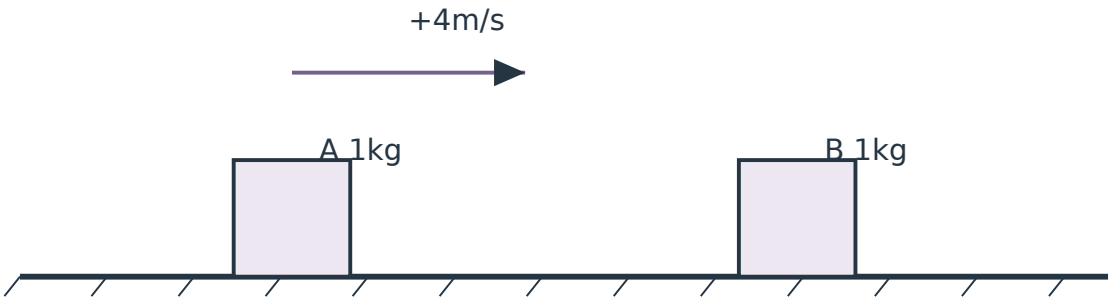

図 3　衝突前（演習 1）：A 1kg は+4m/s、B 1kg は 0m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。



図 4　衝突後（演習 1）：A 1kg は+1m/s、B 1kg は+3m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。

演習 1(1)

衝突前後の全運動量を比較するには、どの物体を系に選び、どの時間区間を比べればよいか答えよ。

演習 1(2)

右向きを正とする。与えられた水平外力の力積の条件から、系の水平全運動量が保存するか判断し、その理由を説明せよ。

演習 1(3)

A だけを系に選んだ場合、A の運動量は保存するか。B から受ける力積に着目して説明せよ。

演習 1(4)

図から衝突前の接近の速さと衝突後の分離の速さを求め、反発係数eを計算せよ。また、衝突後に A と B が同じ右向きに進んでいても分離する理由を説明せよ。

演習 1(5)

衝突前後の全運動量と全運動エネルギーをそれぞれ計算し、保存される量と減少する量を答えよ。

対応解説：巻末の『演習 1 の解答・解説』

演習 2

質量の異なる物体の弾性衝突

滑らかな水平床で、質量2 kgの物体 A が左側から右向きに3 m/sで進み、右側で静止している質量1 kgの物体 B に正面衝突する。

右向きを正、反発係数を$e = 1$とする。A と B の系に働く水平外力の力積は無視できる。

演習 2(1)

運動量保存則と反発係数の式を立て、衝突後の A、B の速度を求めよ。

演習 2(2)

衝突前の接近の速さと衝突後の分離の速さを求めよ。また、全運動量と全運動エネルギーを衝突前後で計算し、保存を確認せよ。

演習 2(3)

演習 2(1)の結果をもとに、弾性衝突では常に 2 物体の速度が交換されるといえるか説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 2 の解答・解説』

演習 3

同じ向きに進む物体の衝突

滑らかな水平床で、質量がともに1 kgの物体 A、B が右向きに進んでいる。

左側の A の速度は+5 m/s、右側の B の速度は+1 m/sである。A が B に追いついて正面衝突する。

右向きを正、反発係数を$e = 0.5$とする。衝突中の水平外力の力積は無視できる。

演習 3(1)

A が B に追いつく理由を相対速度で説明し、接近の速さを求めよ。

演習 3(2)

運動量保存則と反発係数の関係を使い、衝突後の A、B の速度を求めよ。

演習 3(3)

衝突後の分離の速さを求め、反発係数が0.5になることを確認せよ。また、$\frac{v_B}{u_A}$を反発係数とする考え方が誤りである理由を説明せよ。

演習 3(4)

衝突前後の全運動量と全運動エネルギーを求め、結果を比較せよ。

対応解説：巻末の『演習 3 の解答・解説』

演習 4

反発係数を使えるか判断する

一直線上で、物体 A が左、物体 B が右に離れて存在する。両物体は右向きを正として運動するものとし、以下の 2 つの条件をそれぞれ独立に考える。追加の外力や、速度を変化させる条件は与えられていない。

演習 4(1)

A、B の速度がともに+2 m/sである場合、2 物体の間隔はどう変化するか。接近の速さを求め、反発係数の式を適用できるか説明せよ。

演習 4(2)

A の速度が+1 m/s、B の速度が+3 m/sである場合、2 物体の間隔はどう変化するか。この条件で新たな衝突が起こるかを判断し、反発係数の式を適用できるか説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 4 の解答・解説』

©ミライコーチング

発展：系による保存可否の違い

演習 5

固定壁と球の衝突

質量0.2 kgの球が、右側にある固定壁へ向かって右向きに5 m/sで進み、正面衝突する。

右向きを正とし、壁の速度は0 m/s、球と壁の反発係数は$e = 0.6$である。壁は衝突によって移動しないものとする。

衝突直前から直後までの球の運動を考え、球だけを系とする。

演習 5(1)

反発係数の式から、衝突直後の球の速度を求め、向きを答えよ。

演習 5(2)

球の運動量の変化を求めよ。また、球が壁から受けた力積を符号付きで求めよ。

演習 5(3)

衝突前後の球の運動エネルギーを求め、増減を説明せよ。

演習 5(4)

球単体の運動量が保存しない理由を説明せよ。また、その場合でも反発係数を使える理由を、運動量保存則との役割の違いに着目して説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 5 の解答・解説』

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1)　比較する系と時間区間

系は**物体 A と物体 B をまとめた系**である。

比較する時間区間は、衝突直前から衝突直後までである。衝突直前の A、B の速度と、衝突直後の A、B の速度を対応させる。

演習 1(2)　全運動量の保存可否

系に働く水平外力の力積は無視できるため、A と B の水平全運動量は保存する。

A と B が衝突中に互いに及ぼす力は、A+B の系では内部の力である。内部の力積は打ち消し合うので、外力の力積が無視できる条件では全運動量が変化しない。

©ミライコーチング

演習 1(3)　A だけを系とした場合

A 単体の運動量は保存しない。

A は衝突中に B から力積を受けるため、A の運動量が変化する。実際、A の速度は+4 m/sから+1 m/sへ変わっている。

A が受けた力積は、

$$\begin{aligned}\Delta p_A &= (1\,\mathrm{kg})\{(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &\qquad -(+4\,\mathrm{m/s})\} \\ &= -3\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

となる。

この負号は、A が左向きの力積を受けたことを意味する。

演習 1(4)　接近・分離の速さと反発係数

衝突直前は、

$$u_A = +4\,\mathrm{m/s}, \qquad u_B = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

よって、接近の速さは、

$$\begin{aligned}u_A - u_B &= (+4\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

衝突直後は、

$$v_A = +1\,\mathrm{m/s}, \qquad v_B = +3\,\mathrm{m/s}$$

であるから、分離の速さは、

$$\begin{aligned}v_B - v_A &= (+3\,\mathrm{m/s}) - (+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 2\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

である。

したがって、

$$e = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m/s}} = 0.5$$

となる。

衝突後の A と B はともに右向きに進むが、右側の B の方が速い。したがって、2 物体の間隔が広がり、分離する。

演習 1(5)　全運動量と全運動エネルギー

衝突前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (1\,\text{kg})(+4\,\text{m/s}) \\ &\quad +(1\,\text{kg})(0\,\text{m/s}) \\ &= +4\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突後は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (1\,\text{kg})(+1\,\text{m/s}) \\ &\quad +(1\,\text{kg})(+3\,\text{m/s}) \\ &= +4\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

である。

したがって、全運動量は保存している。

全運動エネルギーは、衝突前が、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(4\,\text{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\text{kg})(0\,\text{m/s})^2 \\ &= 8\,\text{J} \end{aligned}$$

衝突後が、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(1\,\text{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\text{kg})(3\,\text{m/s})^2 \\ &= 0.5\,\text{J} + 4.5\,\text{J} \\ &= 5\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

よって、全運動エネルギーは3 J減少した。

この衝突では、**全運動量は保存するが、全運動エネルギーは保存しない**。両者の保存条件を区別する必要がある。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)　衝突後の速度

右向きを正とすると、

$$u_A = +3\,\mathrm{m/s}, \qquad u_B = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

A と B の系に働く水平外力の力積は無視できるため、運動量保存則を適用できる。

$$\begin{aligned}&(2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s})\\&\quad +(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})\\&= (2\,\mathrm{kg})v_A + (1\,\mathrm{kg})v_B\end{aligned}$$

したがって、

$$(2\,\mathrm{kg})v_A + (1\,\mathrm{kg})v_B = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

反発係数は$e = 1$なので、

$$\begin{aligned}v_B - v_A &= 1\{(+3\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s})\}\\&= 3\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

これを整理すると、

$$v_B = v_A + 3\,\mathrm{m/s}$$

である。

運動量保存式に代入すると、

$$\begin{aligned}&(2\,\mathrm{kg})v_A\\&\quad +(1\,\mathrm{kg})(v_A + 3\,\mathrm{m/s})\\&= +6\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

を得る。

これを解けば、

$$v_A = +1\,\mathrm{m/s}$$

であり、

$$v_B = +4\,\mathrm{m/s}$$

となる。

演習 2(2)　接近・分離と保存則の確認

衝突前の接近の速さは、

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= (+3\,\mathrm{m/s}) - (0\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突後の分離の速さは、

$$\begin{aligned} v_B - v_A &= (+4\,\mathrm{m/s}) - (+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

接近の速さと分離の速さは等しい。

全運動量は、衝突前が、

$$P_{\text{前}} = (2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s}) = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

衝突後が、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

全運動エネルギーは、衝突前が、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

衝突後が、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 1\,\mathrm{J} + 8\,\mathrm{J} \\ &= 9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

よって、全運動量と全運動エネルギーの両方が保存している。

演習 2(3)　速度交換の成立条件

弾性衝突だからといって、常に 2 物体の速度が交換されるわけではない。

この例では、A の速度は+3 m/sから+1 m/s、B の速度は0 m/sから+4 m/sへ変化した。速度の単純な交換にはなっていない。

例題 1 のような等質量の一次元弾性衝突では速度が交換されるが、質量が異なる場合には運動量保存則と反発係数の式を組み合わせて求める必要がある。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)　接近する条件と速さ

A は左側、B は右側にあり、

$$u_A = +5\,\mathrm{m/s}, \qquad u_B = +1\,\mathrm{m/s}$$

である。

A の方が右向きの速度が大きいので、A は B に追いつく。

接近の速さは、

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= (+5\,\mathrm{m/s}) - (+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

演習 3(2)　衝突後の速度

A と B を合わせた系では、水平外力の力積を無視できるので、運動量が保存する。

$$\begin{aligned}&(1\,\mathrm{kg})(+5\,\mathrm{m/s})\\&\quad+(1\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s})\\&=(1\,\mathrm{kg})v_A+(1\,\mathrm{kg})v_B\end{aligned}$$

両辺を1 kgで割ると、

$$v_A+v_B=+6\,\mathrm{m/s}$$

となる。

反発係数の式から、

$$\begin{aligned}v_B-v_A&=0.5\{(+5\,\mathrm{m/s})-(+1\,\mathrm{m/s})\}\\&=2\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

である。

2 式を加えると、

$$2v_B=8\,\mathrm{m/s}$$

より、

$$v_B=+4\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、

$$v_A=+2\,\mathrm{m/s}$$

である。

演習 3(3)　分離の速さと誤った速さの比

衝突後の分離の速さは、

$$\begin{aligned} v_B - v_A &= (+4\,\mathrm{m/s}) - (+2\,\mathrm{m/s}) \\ &= 2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

よって、

$$e = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m/s}} = 0.5$$

となる。

一方、

$$\frac{v_B}{u_A} = \frac{4\,\mathrm{m/s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 0.8$$

であるが、これは反発係数ではない。

反発係数は、各物体の地面に対する速度の比ではなく、**衝突後の分離の速さを衝突前の接近の速さで割った値**だからである。

演習 3(4)　全運動量と全運動エネルギー

衝突前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (1\,\mathrm{kg})(+5\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

衝突後は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (1\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

全運動量は保存している。

衝突前の全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 12.5\,\mathrm{J} + 0.5\,\mathrm{J} \\ &= 13\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

衝突後は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 2\,\mathrm{J} + 8\,\mathrm{J} \\ &= 10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、全運動エネルギーは3 J減少した。

A と B が衝突前も衝突後も右向きに進んでいても、2 物体の速度差と運動エネルギーは変化する。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1)　同じ速度で進む場合

A と B の速度は、

$$u_A = u_B = +2\,\mathrm{m/s}$$

である。

接近の速さは、

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= (+2\,\mathrm{m/s}) - (+2\,\mathrm{m/s}) \\ &= 0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

A と B は同じ速度で進むため、間隔は変わらない。初めから離れている 2 物体が、この条件だけで新たに衝突することはない。

反発係数の式は、

$$e = \frac{v_B - v_A}{u_A - u_B}$$

であるが、ここでは分母が0となる。

したがって、反発係数は定義できず、この衝突式を適用できない。

演習 4(2)　間隔が広がる場合

A と B の速度は、

$$u_A = +1\,\mathrm{m/s}, \qquad u_B = +3\,\mathrm{m/s}$$

である。

B は A より右側にあり、A より速く右向きに進むため、間隔は広がる。

相対速度を計算すると、

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= (+1\,\mathrm{m/s}) - (+3\,\mathrm{m/s}) \\ &= -2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

負号は、A が B に追いつかず、間隔が広がることを表している。間隔が広がる速さは2 m/sである。

追加外力や位置の変更条件が与えられていないので、この 2 物体は新たに衝突しない。

したがって、衝突前後の接近・分離を前提にした反発係数の式は適用できない。

分母が0でないというだけで、衝突が起こらない場面に反発係数を使ってよいわけではない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1)　反射速度

壁は右側に固定されており、球は右向きに衝突する。

右向きを正とすると、

$$u = +5\,\mathrm{m/s}$$

である。

固定壁の速度は0 m/sなので、反発係数の式から、

$$v = -eu$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} v &= -0.6(+5\,\mathrm{m/s}) \\ &= -3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突後の球は左向きに3 m/sで進む。

演習 5(2)　運動量の変化と力積

球の質量は0.2 kgである。

運動量の変化は、

$$\Delta p = m(v - u)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Delta p &= (0.2\,\mathrm{kg})\{(-3\,\mathrm{m/s}) \\ &\qquad -(+5\,\mathrm{m/s})\} \\ &= (0.2\,\mathrm{kg})(-8\,\mathrm{m/s}) \\ &= -1.6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

運動量の変化は球が受けた力積に等しい。よって、球が壁から受けた力積は、

$$I = -1.6\,\mathrm{N\,s}$$

である。

負号は、壁が球に与えた力積が左向きであることを示す。

演習 5(3)　球の運動エネルギー

衝突前の球の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(0.2\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 2.5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

衝突後は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(0.2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 0.9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、球の運動エネルギーの変化は、

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0.9\,\mathrm{J} - 2.5\,\mathrm{J} \\ &= -1.6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

であり、1.6 J減少した。

運動エネルギーの減少は、衝突時の変形や熱などへのエネルギーの移り変わりと関係する。

演習 5(4)　運動量保存と反発係数の役割

球だけを系に選んだ場合、壁が球に及ぼす力は外力である。

球は壁から$-1.6\,\mathrm{N\,s}$の力積を受けて運動量が変化したため、球単体の運動量は保存しない。

一方、反発係数は球と壁の衝突前の接近の速さと、衝突後の分離の速さの比として定義される。

今回、接近の速さは5 m/s、分離の速さは3 m/sである。

よって、

$$e = \frac{3\,\mathrm{m/s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 0.6$$

となる。

反発係数を求めるために、球単体の運動量が保存する必要はない。

反発係数は衝突前後の相対速度の関係を表し、運動量保存則は系に働く外力の力積によって適用可否が決まる。

この違いを確かめることが、2 物体の衝突と固定壁への衝突を正しく使い分けるための判断となる。