

第 169 講 数列の極限

学習目標

この講では、数列の極限の意味を理解し、次のことができるようになる。

- 数列の項がある有限の値に限りなく近づくことの意味を説明できる。
- 数列の極限の記号を読み、その意味を説明できる。
- 基本的な数列について、極限の値を求められる。
- 「近づく」と「一度だけ近づく」「有限個の項で判断できる」を区別できる。

数列を見る新しい視点

本講では、 n は正整数、各項 a_n は実数である無限数列を扱い、有限の実数へ近づく極限を中心に学ぶ。

数列では、項番号 n を大きくしていったとき、項の値がどのように変化するかを見る。

例えば、数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ を考えると、項は次第に 0 に近づいていく。

しかし、ここで注意したいことがある。有限個の項を見て「最後は必ずこの値になる」と判断しているわけではない。数列は無限に続くため、重要なのは後ろのすべての項が指定した範囲内に入り続けるかどうかである。

「近づく」とは、目標となる値との差をどれだけ小さく指定されても、その小ささを保つことができるという意味である。

数列の極限

数列 $\{a_n\}$ が、ある実数 α に限りなく近づくとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書き、「数列 $\{a_n\}$ は α に収束する」という。

このとき実数 α をこの数列の極限值という。

この意味は、任意の正の数 ε に対して、十分大きな正整数 N を選ぶと、 $n \geq N$ のすべての項で

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

つまり、極限とは「ある一つの項が近づくこと」ではなく、「その後のすべての項が指定した範囲内に入り続けること」を表す。

極限を考えたときの判断

数列の極限では、次の点を意識する。

- 項番号 n は正整数であり、 n をどんどん大きくすることで変化を見る。
- ∞ は数列へ代入する数ではなく、「項番号が限りなく大きくなること」を表す記号である。
- 極限の値と各項の値は一致しなくてもよい。
- ただし、定数列のように最初から極限の値と一致していてもよい。

極限についての注意

次の考え方は誤りである。

- ・有限個の項を表にして、それだけで極限を証明できる。
- ・一度だけ極限の値に近づけばよい。
- ・必ず単調に増加または減少しながら近づく。
- ・極限の値とは絶対に一致しない。

例えば、定数列 $a_n = -2$ はすべての項が -2 であるため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$ となる。

例 $a_n = \frac{1}{n}$ が 0 に近づく理由

数列 $a_n = \frac{1}{n}$ を考える。

n が大きくなるほど分母が大きくなるため、値は小さくなる。

例えば、次のようになる。

n	1	2	4	10	100
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

この表は変化の様子を見るためのものであり、これだけで極限を証明したことにはならない。

極限の意味を正しく理解するには、1つの幅だけではなく、どのような小さい正の幅を指定されても対応できることを見る必要がある。

任意の正の数 ε に対して、 N を $N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる正整数として選ぶ。 $n \geq N$ ならば、次が成り立つ。

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

したがって、 $n \geq N$ のすべての項で 0 との差を ε より小さくできる。

特に $\varepsilon = \frac{1}{10}$ の場合は、 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ より、 $n > 10$ となる。

したがって、正整数 n では $n \geq 11$ のとき、その後のすべての項で 0 との差は $\frac{1}{10}$ より小さい。

このように、どのような小さい幅を指定されても対応できることが、極限の意味である。

例題 1

数列 $a_n = \frac{1}{n}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 4, 10, 100$ のときの a_n の値を求めよ。
- (2) $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$ となる正整数 n の条件を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

(1) それぞれ代入すると、

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_{10} = \frac{1}{10}, \quad a_{100} = \frac{1}{100}$$

となる。

(2) 条件は、 $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{10}$ である。

$\frac{1}{n}$ は正なので、 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ となる。

両辺は正であるから、逆数を考えると、 $n > 10$ である。

n は正整数なので、条件を満たすのは $n \geq 11$ である。

(3) n を大きくすると $\frac{1}{n}$ は限りなく 0 に近づくため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

重要なのは、いくつかの項が小さくなることではなく、十分大きい n 以降のすべての項で差を小さくできることである。

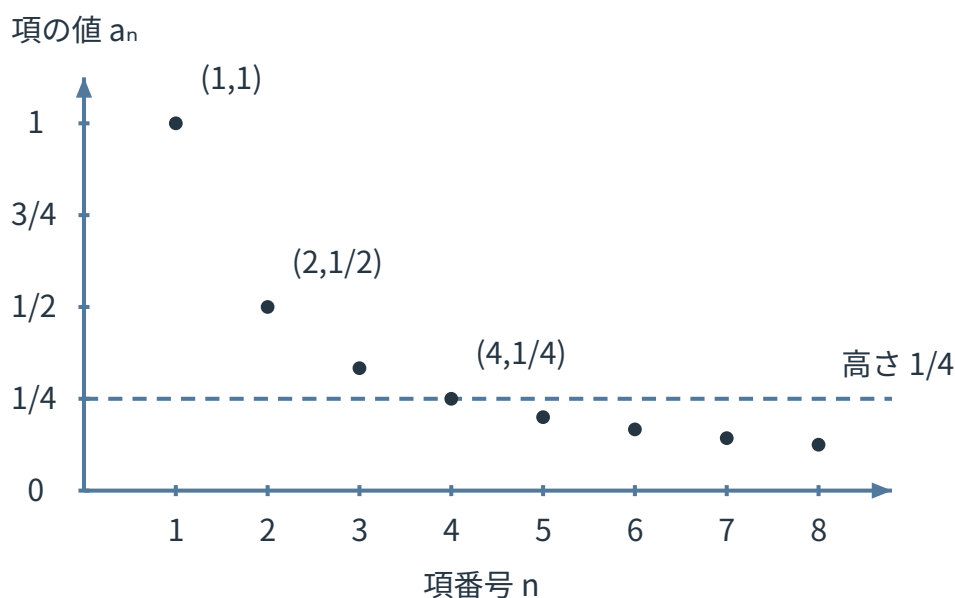


図 1 数列 $a_n = 1/n$ の初めの 8 点だけを示した。点は連結していない。 $n=4$ の点は高さ $1/4$ の破線上にあり、 $n=5 \sim 8$ の点はその下にある。0 は極限の位置であり、実際の項の値として黒点を置いていない。全項の極限は有限個の点だけで判断せず、本文の一般式によって説明する。縦横の縮尺は異なる。

例題 2

数列 $a_n = 3 - \frac{2}{n}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 4, 10$ のときの a_n の値を求めよ。

(2) 3 との差を表し、 $|a_n - 3| < \frac{1}{100}$ となる正整数 n の条件を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 代入すると、 $a_1 = 1$

$$a_2 = 2$$

$$a_4 = \frac{5}{2}$$

$$a_{10} = \frac{14}{5} \text{ となる。}$$

(2) 3 との差は、 $a_n - 3 = -\frac{2}{n}$ であるから、 $|a_n - 3| = \frac{2}{n}$ となる。

条件より、 $\frac{2}{n} < \frac{1}{100}$ である。

両辺を整理すると、 $200 < n$ となる。

n は正整数なので、 $n \geq 201$ である。

(3) 任意の正の数 ε に対して、 N を $N > \frac{2}{\varepsilon}$ となる正整数として選ぶ。 $n \geq N$ ならば、次が成り立つ。

$$0 < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

したがって、3 との差 $|a_n - 3|$ は、十分大きな n 以降のすべての項で任意に小さくできる。

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ である。

例題 3

数列 $a_n = -2$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(2) 極限の値と各項の値が一致してよいか説明せよ。

例題 3 の解答・解説

(1) 任意の正の数 ε に対して、 $|a_n - (-2)| = |-2 - (-2)| = 0 < \varepsilon$ がすべての n で成り立つ。

したがって、 $N = 1$ とすれば十分であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$ である。

(2) 極限とは「近づき方」を表すが、各項が極限の値と一致してはいけないという決まりはない。

この数列では、すべての項が最初から極限の値 -2 と等しい。

よって、極限の値と各項が一致する場合もある。

演習問題

演習問題 1

数列 $a_n = \frac{2}{n}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 5, 10$ のときの a_n の値を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

演習問題 2

数列 $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 2 との差を絶対値で表せ。

(2) $|a_n - 2| < \frac{1}{20}$ となる正整数 n の条件を求めよ。

演習問題 3

数列 $a_n = -\frac{1}{n}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 0 との差を絶対値で表せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (3) 数列の項が負の側から 0 に近づくことについて説明せよ。

演習問題 4

数列 $a_n = 5$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $|a_n - 5|$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

演習問題 5

数列 $a_n = \frac{1}{n+1}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a_9 を求めよ。
- (2) $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$ となる正整数 n の条件を求めよ。

演習問題 6

ある数列 $\{a_n\}$ があり、最初の 3 項が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

である。

この情報だけから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ と断定できるか答えよ。

また、断定できない理由を、 $n \geq 4$ の項の具体的な定め方を 1 つ示して説明せよ。

演習問題 7

数列 $\{a_n\}$ を、 $a_1 = 100$ 、 $n \geq 2$ では $a_n = \frac{1}{n}$ と定める。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求め、最初の 1 項だけが異なっても極限が変わらない理由を説明せよ。

演習問題 8

次の主張について答えよ。

「ある正整数 N が存在して、 $n \geq N$ では常に

$|a_n - 2| < \frac{1}{10}$ が成り立つならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ である。」

- (1) この主張が正しいか答えよ。
- (2) 正しくない場合は、反例となる数列を 1 つ示し、理由を説明せよ。

演習問題 1 の解答・解説

(1) $a_n = \frac{2}{n}$ に代入する。

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_5 = \frac{2}{5}, \quad a_{10} = \frac{1}{5}$$

となる。

(2) 0 との差は、 $|a_n - 0| = |\frac{2}{n}| = \frac{2}{n}$ である。

n を大きくすると $\frac{2}{n}$ は小さくなる。

任意の正の小さい幅を指定されても、十分大きな n 以降ではその幅より小さい差を保てるため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

演習問題 2 の解答・解説

(1) 2 との差は、 $a_n - 2 = \frac{1}{n}$ である。

したがって、 $|a_n - 2| = \frac{1}{n}$ となる。

(2) 条件より、 $\frac{1}{n} < \frac{1}{20}$ である。

両辺が正なので逆数を考えると、 $n > 20$ となる。

n は正整数なので、 $n \geq 21$ のとき、以降すべての項で 2 との差は $\frac{1}{20}$ より小さい。

演習問題 3 の解答・解説

(1) $a_n = -\frac{1}{n}$ なので、 $|a_n - 0| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$ となる。

(2) $\frac{1}{n}$ は n を大きくすると 0 に近づくため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

(3) この数列の項はすべて負である。

しかし、0 との差は $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$ であり、十分大きい n ではこの差を任意に小さくできる。

したがって、値が 0 より小さい側にあっても、極限は 0 になる。

演習問題 4 の解答・解説

(1) すべての項が 5 であるため、 $|a_n - 5| = |5 - 5| = 0$ となる。

(2) すべての項で極限の値と一致している。

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ である。

極限の値と各項が一致していても、極限を考えることはできる。

演習問題 5 の解答・解説

(1) $a_9 = \frac{1}{9+1}$ なので、 $a_9 = \frac{1}{10}$ である。

(2) 条件は、 $|\frac{1}{n+1} - 0| < \frac{1}{10}$ である。

$\frac{1}{n+1}$ は正なので、 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$ となる。

正の数の逆数を考えると、 $n+1 > 10$ である。

したがって、 $n > 9$ となる。

n は正整数なので、 $n \geq 10$ が条件である。

$n = 9$ では差は $\frac{1}{10}$ であり、「より小さい」という条件を満たさないことに注意する。

演習問題 6 の解答・解説

最初の 3 項だけでは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ とは断定できない。

理由は、極限では有限個の項ではなく、十分大きな n 以降のすべての項を見る必要があるからである。

例えば、 $n \geq 4$ の項をすべて 7 と定める数列を考える。

この場合、最初の 3 項は $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ であるが、その後は常に 7 になる。

したがって、後ろの項は 0 に近づかない。

よって、最初の有限個の項の値だけでは、その後の規則を指定しない限り極限は決まらない。

演習問題 7 の解答・解説

$n \geq 2$ では、 $a_n = \frac{1}{n}$ である。

任意の正の数 ε に対して、 $N \geq 2$ かつ $N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる正整数 N を選ぶ。 $n \geq N$ ならば、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となる。

したがって、十分大きな n 以降のすべての項で 0 との差を任意に小さくできる。

また、初項の番号は 1 であり、 $N \geq 2$ より $1 < N$ なので、この初項の値 100 は $n \geq N$ の全項についての条件に影響しない。

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

有限個の初めの項が異なっても、極限ではその後のすべての項がどのように近づくかを見ることが重要である。

演習問題 8 の解答・解説

(1) この主張は正しくない。

理由は、一つの幅 $\frac{1}{10}$ に入ることだけでは、極限が 2 であることを示せないからである。

極限 2 とは、どのような小さい正の幅を指定されても、その幅より差を小さくできることを意味する。

(2) 反例として、 $a_n = 2.05$ とする定数列を考える。

このとき、 $|a_n - 2| = |2.05 - 2| = 0.05$ である。

したがって、 $|a_n - 2| < \frac{1}{10}$ はすべての n で成り立つ。

しかし、差 0.05 は 0 ではなく、例えば $\frac{1}{100}$ より大きい。

そのため、2 へ任意に近づくとはいえない。

よって、この条件だけでは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ とは判断できない。