

## 第 155 講 確率変数と確率分布

### 学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 試行の結果と確率変数の値を区別して説明できる。
- ・ 確率変数がとる値ごとに、その確率を集めて確率分布を作れる。
- ・ 分布表から、ある条件を満たす確率を求められる。
- ・ 各値の確率が非負で、全体の合計が 1 になることを確認できる。

### 確率を値に対応させて見る

本講では、有限個の試行結果を考え、その結果に数値を対応させる場合を扱う。

試行の各結果に実数をただ 1 つ対応させる規則を確率変数という。

例えば、コインを 2 回投げるという架空の試行を考える。結果は表を H、裏を T で表すと、 $HH, HT, TH, TT$  の 4 通りである。

ここで、表が出た回数を表す規則を決め、確率変数を  $X$  とする。このとき、 $X$  は試行結果に対応する規則であり、試行結果そのものではない。

対応は次のようになる。

| 試行結果 | 確率変数 $X$ の値 |
|------|-------------|
| $HH$ | 2           |
| $HT$ | 1           |
| $TH$ | 1           |
| $TT$ | 0           |

この表で、2, 1, 0 は確率変数  $X$  がとる値であり、特定の値を表すときには  $x$  と書く。

また、 $P(X = x)$  は「確率変数  $X$  が値  $x$  をとる」という事象の確率を表す。

例えば、 $P(X = 1)$  は  $HT$  または  $TH$  になる確率を表す。

このように、試行結果、確率変数  $X$  の値  $x$ 、そしてその値になる確率  $P(X = x)$  を区別して考えることが重要である。

### 確率分布

有限個の値をとる確率変数  $X$  について、 $X$  がとりうる相異なるすべての候補値を漏れなく重複なく並べ、それぞれの値をとる確率を対応させたものを確率分布という。

$X$  がとる値を  $x_1, x_2, \dots, x_m$  とすると、確率分布ではそれぞれの値に対して

$$P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_m)$$

を対応させる。

ここで、確率変数の値は 0 や負の数でもよい。例えば、 $X = -2$  となるような確率変数も考えることができる。

一方で、確率は必ず 0 以上であり、すべての値についての確率の合計は 1 になる。

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_m) = 1$$

また、表に含まれていない値については、その値になる確率は 0 である。

確率分布を作るときは、値の候補をすべて確認し、それぞれに正しい確率を対応させる必要がある。

## 値の種類と確率を混同しない

確率変数の値が何種類あるかだけでは、それぞれの確率は決まらない。

例えば、赤球 3 個、青球 2 個が入った袋から 1 個を取り出す架空の試行を考える。5 個の球はそれぞれ区別され、どの球も同じ確率で選ばれるものとする。

このとき、5 個の球それぞれが同じ確率で選ばれるのであり、色の種類が同じ確率になるわけではない。

赤になる結果は 3 個、青になる結果は 2 個あるため、

赤になる確率は  $\frac{3}{5}$ 、青になる確率は  $\frac{2}{5}$  である。

単に「赤と青の 2 種類だから、それぞれ  $\frac{1}{2}$ 」と考えるのは誤りである。

確率は、どの結果が同じ確率で起こるかを確認してから決める必要がある。

### 確率を足す理由

事象  $X \leq c$  の確率を求めるときは、条件を満たすすべての値についての確率を足す。

例えば、 $X$  が 0, 1, 2 の値をとり、 $X \leq 1$  を考える場合、該当する値は 0 と 1 である。

$X = 0$  と  $X = 1$  は同時には起こらない。つまり重なりのない事象であるため、それぞれの確率を足すことができる。

確率変数の問題では、「条件に合う値を探す」とことと「対応する確率を集める」ことが重要である。

### 例題 1

公平な 6 面サイコロを 1 回投げる。奇数の目が出たとき  $X = 1$ 、偶数の目が出たとき  $X = 0$  とする。確率変数  $X$  の確率分布を求めよ。

### 例題 1 の解答・解説

サイコロの目は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通りであり、公平なサイコロなのでそれぞれの目が出る確率は  $\frac{1}{6}$  である。

奇数は 1, 3, 5 の 3 通り、偶数は 2, 4, 6 の 3 通りである。

したがって、 $X = 1$  となる確率は  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 、 $X = 0$  となる確率も  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  である。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 0      | $\frac{1}{2}$ |
| 1      | $\frac{1}{2}$ |

確率の合計は  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  であり、確率分布の条件を満たす。

### 例題 2

公平なコインを 2 回投げる。表が出た回数を確率変数  $X$  とする。

ただし、1 回目と 2 回目の結果は独立であるものとする。 $X$  の確率分布を求めよ。

### 例題 2 の解答・解説

1 回目の結果と 2 回目の結果を、それぞれ表を H、裏を T で表す。

コインは公平なので、1 回目・2 回目とも表と裏が出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  である。

また、2 回の試行は独立なので、順序付き結果の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となる。

したがって、4つの結果 $HH, HT, TH, TT$ はすべて同じ確率 $\frac{1}{4}$ で起こる。

表が出た回数  $X$  と対応させる。

| $X$ の値 | 対応する結果   | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|----------|---------------|
| 0      | $TT$     | $\frac{1}{4}$ |
| 1      | $HT, TH$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2      | $HH$     | $\frac{1}{4}$ |

したがって、確率分布は

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 0      | $\frac{1}{4}$ |
| 1      | $\frac{1}{2}$ |
| 2      | $\frac{1}{4}$ |

である。

確率の合計は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

となり、確率分布の条件を満たす。

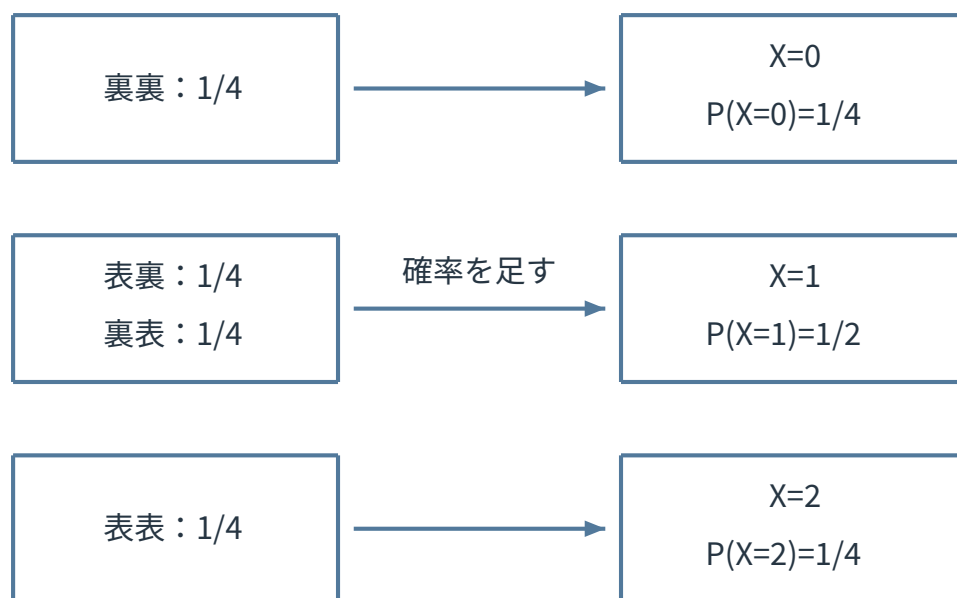


図1 公平なコインを独立に2回投げると、左の4結果はそれぞれ確率 $1/4$ で起こる。右の $X$ は表の回数である。表裏と裏表はどちらも $X=1$ に対応するため、その確率を足して $P(X=1)=1/4+1/4=1/2$ となる。

**例題 3**

赤球 3 個、青球 2 個が入った袋から、球を 1 個取り出す。各球は同じ確率で選ばれるものとする。赤球を取り出したとき  $X = 2$ 、青球を取り出したとき  $X = -1$  とする。確率変数  $X$  の確率分布を求め、 $P(X > 0)$  を求めよ。

**例題 3 の解答・解説**

球を色ではなく、5 個の球をそれぞれ区別して考える。  
赤球は 3 個、青球は 2 個あるので、  
赤球を取り出す確率は  $\frac{3}{5}$ 、青球を取り出す確率は  $\frac{2}{5}$  である。  
 $X$  の値に対応させると、分布は次のようになる。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| -1     | $\frac{2}{5}$ |
| 2      | $\frac{3}{5}$ |

確率の合計は  $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$  である。  
また、 $X > 0$  を満たす値は  $X = 2$  だけである。  
したがって、 $P(X > 0) = P(X = 2) = \frac{3}{5}$  である。  
ここで、 $X$  の値が 2 種類だからといって、それぞれの確率を  $\frac{1}{2}$  としてはいけない。確率は、同様に確からしい結果である 5 個の球を基準に決まる。

**演習問題****練習問題 1**

公平な 6 面サイコロを 1 回投げる。出た目を  $Y$  とし、確率変数  $X$  を次のように定める。

- $Y = 1, 2$  のとき  $X = 0$
- $Y = 3, 4, 5$  のとき  $X = 1$
- $Y = 6$  のとき  $X = 2$

確率変数  $X$  の確率分布を求めよ。

**練習問題 1 の解答・解説**

サイコロの結果  $Y$  と確率変数  $X$  の値を区別する。  
それぞれの値に対応する目の数を数える。

| $X$ の値 | 対応するサイコロの目 | 確率 $P(X = x)$               |
|--------|------------|-----------------------------|
| 0      | 1, 2       | $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ |
| 1      | 3, 4, 5    | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ |
| 2      | 6          | $\frac{1}{6}$               |

したがって、確率分布は次の通りである。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 0      | $\frac{1}{3}$ |
| 1      | $\frac{1}{2}$ |
| 2      | $\frac{1}{6}$ |

確率の合計は  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$  であり、確率分布の条件を満たす。

$X$ の値は3種類だが、それぞれの確率が $\frac{1}{3}$ になるわけではない。サイコロの目の対応する個数によって確率が決まる。

### 練習問題 2

公平なコインを3回投げる。表が出た回数を確率変数  $X$  とする。  
順序付き結果はすべて同じ確率で起こるものとして、 $X$  の確率分布を求めよ。

### 練習問題 2 の解答・解説

1回目、2回目、3回目のコインの結果を、それぞれ表を H、裏を T で表す。

3文字を順番に並べたものが、3回の試行結果を表す。

問題の条件より、8つの順序付き結果はすべて同じ確率で起こる。

したがって、それぞれの結果の確率は $\frac{1}{8}$ である。

表の回数  $X$  ごとに、同じ値になる結果をまとめる。

| $X$ の値 | 対応する結果          | 結果の個数 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|-----------------|-------|---------------|
| 0      | $TTT$           | 1     | $\frac{1}{8}$ |
| 1      | $HTT, THT, TTH$ | 3     | $\frac{3}{8}$ |
| 2      | $HHT, HTH, THH$ | 3     | $\frac{3}{8}$ |
| 3      | $HHH$           | 1     | $\frac{1}{8}$ |

例えば、 $X = 1$  では表が1回出る3つの結果が該当する。そのため、同じ値になる複数の結果の確率を足して、

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

となる。

このように、確率変数の値ごとに対応する結果を集めることで確率分布を作る。

確率の合計は、

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

であり、正しい確率分布になっている。

### 練習問題 3

袋の中に赤球4個、青球1個が入っている。各球は区別され、どの球も同じ確率で1個選ばれる。

赤球を選んだとき  $X = 3$ 、青球を選んだとき  $X = -2$  とする。

確率変数  $X$  の確率分布と  $P(X < 0)$  を求めよ。

### 練習問題 3 の解答・解説

5個の球は同じ確率で選ばれる。

赤球は4個、青球は1個なので、

赤球を選ぶ確率は $\frac{4}{5}$ 、青球を選ぶ確率は $\frac{1}{5}$ である。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| -2     | $\frac{1}{5}$ |

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 3      | $\frac{4}{5}$ |

また、 $X < 0$  を満たす値は  $X = -2$  だけである。

したがって、 $P(X < 0) = P(X = -2) = \frac{1}{5}$  である。

確率変数の値には負の数も使えるが、確率そのものは負にならない。

#### 練習問題 4

公平なルーレットがあり、結果は赤、青、緑、黄の 4 種類である。各結果は同じ確率で出る。赤または青が出たとき  $X = 1$ 、緑が出たとき  $X = 0$ 、黄が出たとき  $X = 2$  とする。

$P(X \leq 1)$  を求めよ。

#### 練習問題 4 の解答・解説

4 種類の結果は同じ確率で起こるので、それぞれの確率は  $\frac{1}{4}$  である。

確率変数の値を整理する。

| 結果 | $X$ の値 | 確率            |
|----|--------|---------------|
| 赤  | 1      | $\frac{1}{4}$ |
| 青  | 1      | $\frac{1}{4}$ |
| 緑  | 0      | $\frac{1}{4}$ |
| 黄  | 2      | $\frac{1}{4}$ |

$X \leq 1$  を満たす値は 0 と 1 である。

$X = 0$  は緑、 $X = 1$  は赤と青なので、 $P(X \leq 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  となる。

同じ値になる結果はまとめて考えるが、異なる値の確率を足す場合も、重なりのない事象なので足すことができる。

#### 練習問題 5

ある試行で確率変数  $X$  は 0, 1, 2 の 3 つの値をとる。確率分布の一部が次の表で与えられている。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 0      | $\frac{1}{4}$ |
| 1      | $a$           |
| 2      | $\frac{1}{2}$ |

確率分布になるための  $a$  の値を求め、確率として正しい条件を満たすか確認せよ。

#### 練習問題 5 の解答・解説

確率分布では、すべての確率の合計が 1 になる。

したがって、

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{2} = 1$$

である。

よって、

$$a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

となる。

求めた値は  $0 \leq a \leq 1$  を満たすため、確率として正しい。

したがって、

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| 0      | $\frac{1}{4}$ |
| 1      | $\frac{1}{4}$ |
| 2      | $\frac{1}{2}$ |

が正しい確率分布である。

### 練習問題 6

確率変数  $X$  の分布表として、次の表が与えられた。

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| -1     | $\frac{1}{3}$ |
| 0      | $\frac{1}{2}$ |
| 2      | $\frac{1}{4}$ |

この表が確率分布として正しいか判定し、理由を説明せよ。

### 練習問題 6 の解答・解説

確率分布では、確率の合計が 1 でなければならない。

この表の確率の合計は、

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

である。

通分すると、

$$\frac{4}{12} + \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

となり、1 を超えている。

したがって、この表は確率分布として正しくない。

確率変数の値に  $-1$  が含まれていることは問題ではない。確率変数の値は負でもよいが、確率の合計や各確率の条件を満たす必要がある。

### 練習問題 7

次の 2 つの表が確率分布を表しうるか判定し、理由を説明せよ。

候補値は  $-1, 0, 2$  とする。

表 A

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$  |
|--------|----------------|
| -1     | $\frac{1}{2}$  |
| 0      | $\frac{3}{4}$  |
| 2      | $-\frac{1}{4}$ |

表 B

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| -1     | 0             |
| 0      | $\frac{1}{4}$ |
| 2      | $\frac{3}{4}$ |

### 練習問題 7 の解答・解説

確率分布になるには、次の 2 つの条件を満たす必要がある。

- すべての確率が 0 以上である。
- 確率の合計が 1 である。

まず表 A を確認する。

確率の合計は、

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

であり、合計だけを見ると条件を満たしているように見える。

しかし、 $X = 2$  の確率が  $-\frac{1}{4}$  であり、確率が負になっている。

したがって、表 A は確率分布を表さない。

次に表 B を確認する。

確率の合計は、

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

である。

また、すべての確率が 0 以上である。

したがって、表 B は確率分布を表す。

ここで、 $P(X = -1) = 0$  であることに注意する。候補値として表に書かれていても、実際の試行でその値が起こるとは限らない。

確率分布では、候補値を表に含める場合、その値になる確率が 0 であってもよい。

### 練習問題 8

ある試行の結果は A、B、C、D の 4 通りで、それぞれの確率は次の通りである。

| 結果 | 確率            |
|----|---------------|
| A  | $\frac{1}{2}$ |
| B  | $\frac{1}{4}$ |
| C  | $\frac{1}{8}$ |
| D  | $\frac{1}{8}$ |

確率変数  $X$  を次のように定める。

- A のとき  $X = 1$

- B のとき  $X = 1$
- C のとき  $X = -2$
- D のとき  $X = 3$

確率変数  $X$  の確率分布を求め、分布表が正しいことを確認せよ。

### 練習問題 8 の解答・解説

同じ値になる結果をまとめる。

A と B はどちらも  $X = 1$  になるので、確率を足す。

| $X$ の値 | 対応する結果 | 確率 $P(X = x)$                             |
|--------|--------|-------------------------------------------|
| -2     | C      | $\frac{1}{8}$                             |
| 1      | A,B    | $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ |
| 3      | D      | $\frac{1}{8}$                             |

したがって、確率分布は

| $X$ の値 | 確率 $P(X = x)$ |
|--------|---------------|
| -2     | $\frac{1}{8}$ |
| 1      | $\frac{3}{4}$ |
| 3      | $\frac{1}{8}$ |

である。

確認すると、

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

となる。

したがって、この分布表は正しい。

確率分布を作るときは、まず試行結果を整理し、その後で同じ値になる結果をまとめることが重要である。