第 219 講 曲線の長さ

学習目標

- 曲線を細かい線分で近似する考えから、曲線の長さの公式を説明できる。
- $y = f(x)$ で表された曲線について、導関数を用いて長さを求められる。
- 媒介変数表示された曲線について、x 方向と y 方向の変化を組み合わせて長さを求められる。

1. 曲線を線分の集まりとして測る

折れ線近似から曲線の長さへ

曲線そのものに定規を当てることはできない。そこで、曲線上に点を細かく取り、隣り合う点を線分で結ぶ。その折れ線の長さを足し、点の間隔を限りなく小さくしたときの極限を曲線の長さと考える。

$y = f(x)$ 上の近い 2 点で、x の増加量を Δx、y の増加量を Δy とする。この 2 点を結ぶ線分の長さは、三平方の定理により次の式で表される。

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

ここでは $\Delta x > 0$ とする。この直角三角形では、斜辺 Δs が近い 2 点を結ぶ線分の長さである。

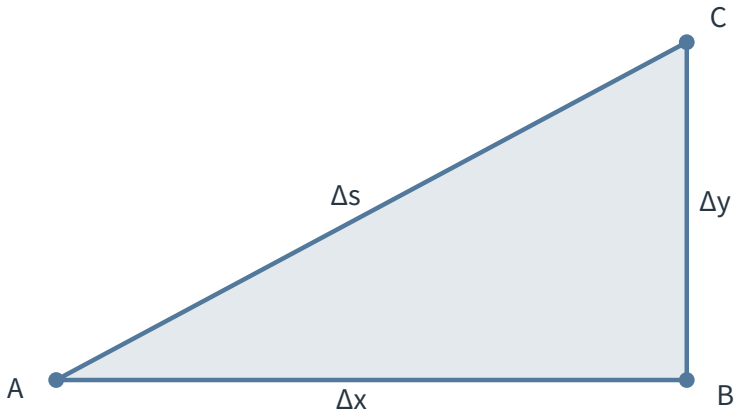

図 1　微小な横の変化と縦の変化を組み合わせる

分割を細かくすると、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は $f'(x)$ に近づく。したがって、$a \leq x \leq b$ における曲線 $y = f(x)$ の長さ L は次の式で求められる。

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

公式の根号内にある 1 は x 方向の変化、$\{f'(x)\}^2$ は y 方向の変化を表している。

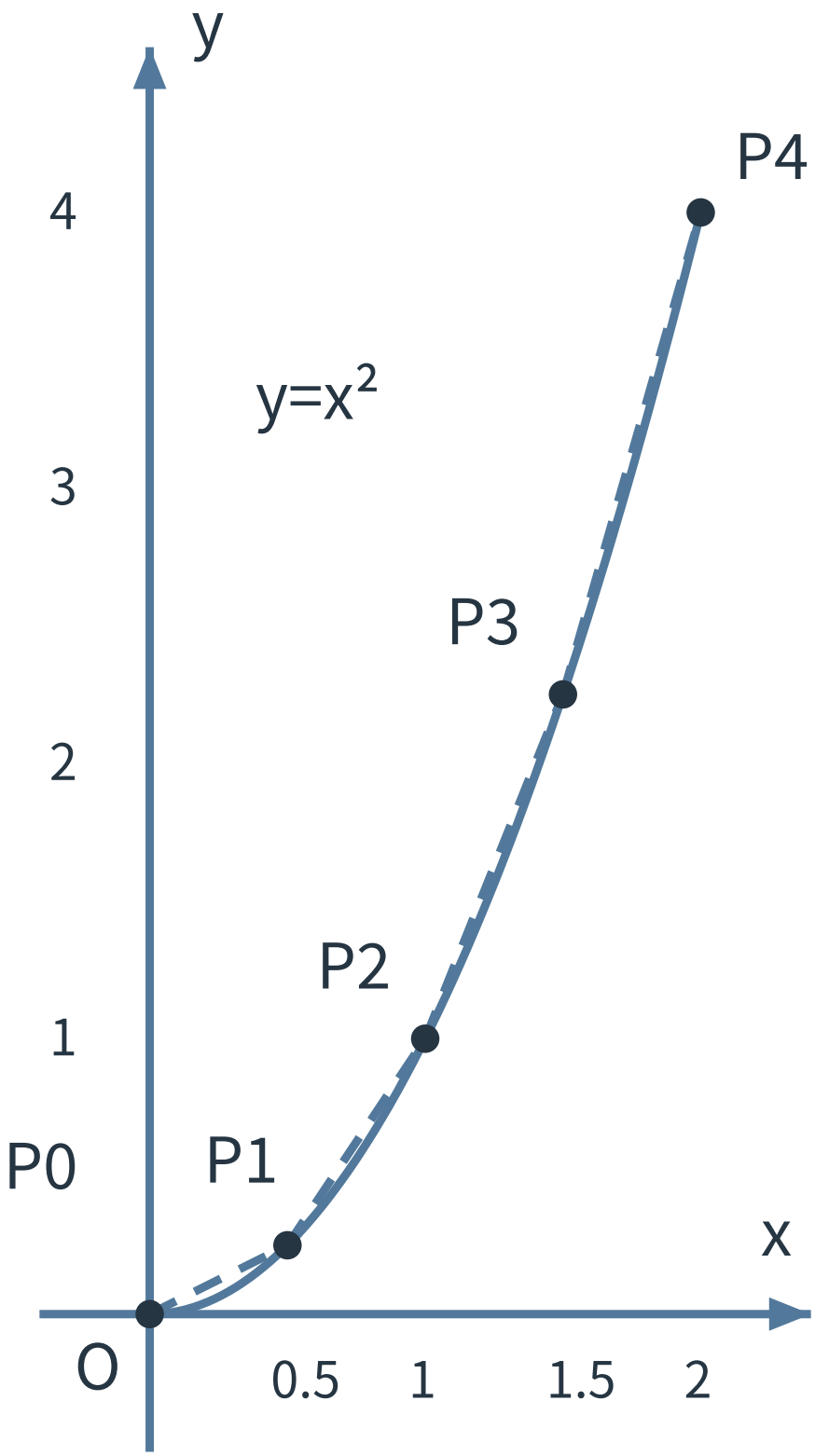

図 2　曲線 $y = x^2$ と、分点を順に結ぶ折れ線近似

関数で表された曲線の長さ

$a \leq x \leq b$ で $f'(x)$ が連続であるとき、曲線 $y = f(x)$ の長さは次の公式で求める。

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$

長さなので、積分の中身はつねに 0 以上である。

よくある誤り

y の変化だけを足して $\int_a^b |\, f'(x)\,|\, dx$ とすると、上下方向の移動しか測れない。曲線の長さでは、横方向の変化も三平方の定理で組み合わせるため、$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ が必要である。

2. $y = f(x)$ で表された曲線

例題 1：直線の長さ

曲線 $y = 2x + 1$ の $0 \leq x \leq 3$ における長さを求めよ。

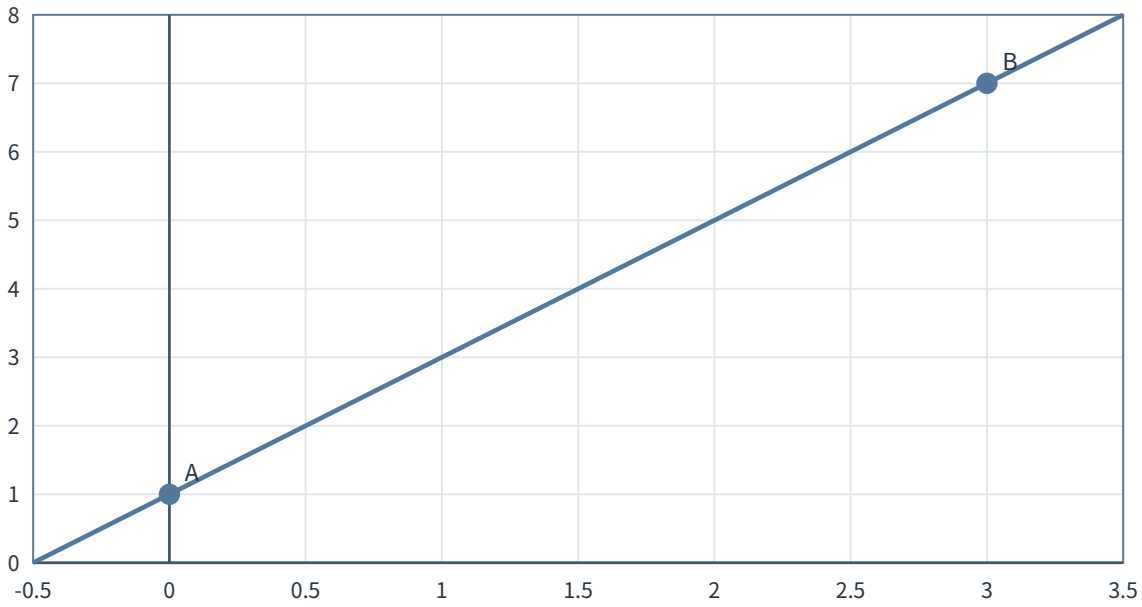

図 3　$A(0,1)$ から $B(3,7)$ までの直線

例題 1 の解答・解説

$f'(x)=2$ である。曲線の長さの公式に代入して計算する。

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+2^2}\,dx$$

$$=\int_0^3 \sqrt{5}\,dx$$

$$=3\sqrt{5}$$

直線では、端点間の横の差が 3、縦の差が 6 なので、三平方の定理による $\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ とも一致する。

例題 2：根号が積分しやすい曲線

曲線 $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ の $0\le x\le 4$ における長さを求めよ。

例題 2 の解答・解説

$x\ge 0$ での導関数を求める。

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

この導関数を公式に代入して計算する。

$$L=\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$$

微分した後、根号内が積分できる形に整理することが計算の要点である。

3. 媒介変数表示された曲線

2 方向の速さを組み合わせる

曲線が $x=x(t)$、$y=y(t)$ と表され、$x(t)$ と $y(t)$ が考える区間で連続的に微分可能であるとする。t がわずかに増えたとき、x 方向の変化は $\frac{dx}{dt}\,dt$、y 方向の変化は $\frac{dy}{dt}\,dt$ である。三平方の定理で 2 方向の変化を組み合わせると、$\alpha\le t\le\beta$ における長さは次の式で求められる。

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

x が途中で増加から減少へ変わる場合でも、この公式は各方向の変化を 2 乗してから足すので使える。

例題 3：媒介変数表示された曲線

$x = t^2$、$y = \frac{2}{3}t^3$ で表される曲線の $0 \le t \le 1$ における長さを求めよ。

例題 3 の解答・解説

$0 \le t \le 1$ での各導関数を求める。

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t^2$$

これらを公式に代入して計算する。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (2t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 2t\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= \frac{2}{3}\Big[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned}$$

$\sqrt{4t^2} = 2t$ としたのは、範囲から $t \ge 0$ であるためである。一般には $\sqrt{4t^2} = 2\,|\,t\,|$ であり、符号の確認を省いてはならない。

4. 演習問題

演習 1：直線

曲線 $y = -3x + 2$ の $-1 \le x \le 2$ における長さを求めよ。

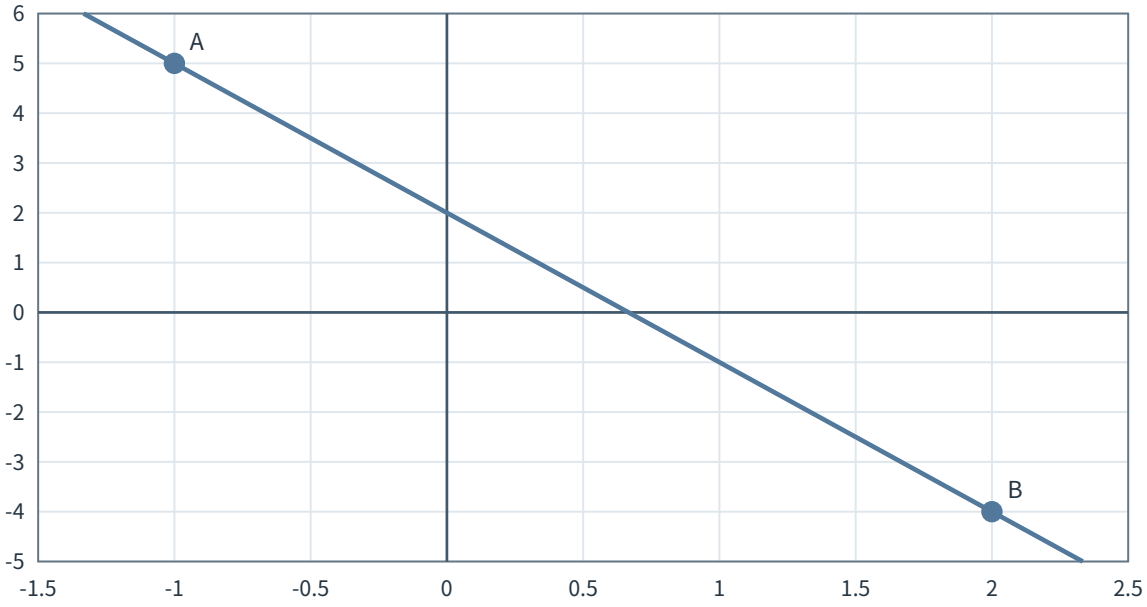

図 4　$A(-1, 5)$ から $B(2, -4)$ までの直線

演習 2：基本公式の利用

曲線 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ の $0 \leq x \leq 3$ における長さを求めよ。

演習 3：端点が正の範囲

曲線 $y = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ の $0 \leq x \leq 3$ における長さを求めよ。

演習 4：媒介変数表示と定数倍

$x = 3t$、$y = 2t^{\frac{3}{2}}$ で表される曲線の $0 \leq t \leq 1$ における長さを求めよ。

演習 5：符号の確認

$x = t^2$、$y = \frac{2}{3}t^3$ で表される曲線の $-1 \leq t \leq 0$ における長さを求めよ。

演習 6：円弧の長さ

$x = 3\cos t$、$y = 3\sin t$ で表される曲線の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における長さを求めよ。また、この曲線が表す図形を答えよ。

©ミライコーチング

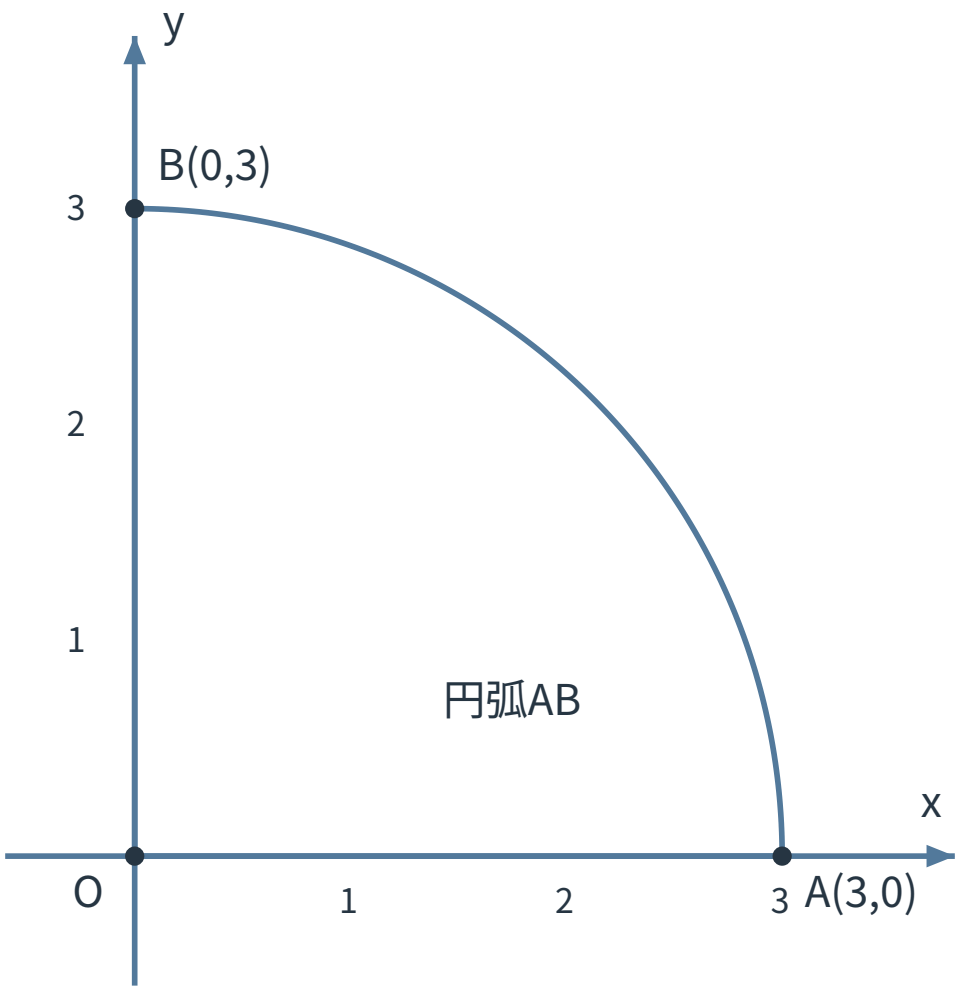

図 5　原点を中心とする半径 3 の円の第 1 象限にある円弧 AB

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$f'(x) = -3$ である。公式に代入して計算する。

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (-3)^2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \sqrt{10}\, dx$$

$$= 3\sqrt{10}$$

傾きが負でも 2 乗するため、根号内は $1 + 9$ である。

演習 2 の解答・解説

$f'(x)=\sqrt{x}$ である。公式に代入して計算する。

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\Big[(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 \\
&= \frac{2}{3}(8-1) \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

$1+\{f'(x)\}^2 = 1+x$ と簡単になることを確認してから積分する。

演習 3 の解答・解説

$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ である。公式に代入して計算する。

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{x+1}{4}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{x+5}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\Big[(x+5)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 \\
&= \frac{16\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

積分区間は x の範囲のままであり、根号内を整理しただけでは端点を変えない。

演習 4 の解答・解説

$0 \le t \le 1$ での各導関数を求める。

$$
\frac{dx}{dt}=3, \qquad \frac{dy}{dt}=3\sqrt{t}
$$

これらを公式に代入して計算する。

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{3^2+\left(3\sqrt{t}\right)^2}\,dt \\
&= 3\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt \\
&= 2\Big[(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 \\
&= 4\sqrt{2}-2
\end{aligned}
$$

媒介変数表示では、$\frac{dy}{dx}$ を作らずに $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dy}{dt}$ を直接公式へ代入できる。

演習 5 の解答・解説

各導関数を求める。

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t^2$$

今回は $t \leq 0$ なので $\sqrt{4t^2} = 2\,|\,t\,| = -2t$ となる。これを用いて長さを計算する。

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (2t^2)^2}\, dt \\ &= \int_{-1}^{0} (-2t)\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= -\frac{2}{3}\Big[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{0} \\ &= \frac{2}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big) \end{aligned}$$

長さが負になった場合は、$\sqrt{t^2} = |\,t\,|$ の扱いを見直す必要がある。

演習 6 の解答・解説

各導関数を求める。

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

これらを公式に代入して計算する。

$$\begin{aligned} L &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

また、$x^2 + y^2 = 9$ であり、指定された t の範囲では $x \geq 0$、$y \geq 0$ である。したがって、この曲線は原点を中心とする半径 3 の円の第 1 象限にある 4 分の 1 円弧を表す。円周 6π の 4 分の 1 が $\frac{3\pi}{2}$ であり、計算結果とも一致する。