

第 17 講 三角比とは何か

学習目標

- ・ 直角三角形で、基準にする鋭角に対して 3 辺の役割を区別できる。
- ・ 辺の長さそのものではなく、2 辺の長さの比を見る理由を説明できる。
- ・ 1 つの鋭角が等しい直角三角形では、対応する辺の比が一定になることを使える。
- ・ 三角比が「角の大きさと辺の比を結びつける考え方」であることを説明できる。

高さや大きさが違う三角形をどう比べるか

長さは変わっても、形が同じなら比は変わらない

次のような直角三角形を考えます。鋭角 A の大きさは同じですが、三角形全体の大きさは違うとします。

小さい三角形の 3 辺が 3, 4, 5、それを 2 倍に拡大した三角形の 3 辺が 6, 8, 10 なら、辺の長さそのものは変わっています。

しかし、対応する 2 辺の比を見ると、

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

となります。

同じように、

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

です。

つまり、三角形を拡大・縮小すると長さは変わっても、**対応する辺どうしの比は変わりません**。

三角比は、この性質を利用して「角の大きさ」を「辺の長さの比」で捉える考え方です。

三角比を見る理由

同じ形の直角三角形では、辺の長さそのものは三角形の大きさによって変わります。

一方、対応する辺の長さの比は変わりません。

そこで、角と三角形の形の関係を調べるときは、長さそのものではなく**辺の比**を使います。

基準にする角を決める

同じ辺でも、見る角によって役割が変わる

直角三角形で三角比を考えるときは、まず直角以外の鋭角を 1 つ選びます。

この教材では、その角を A とします。

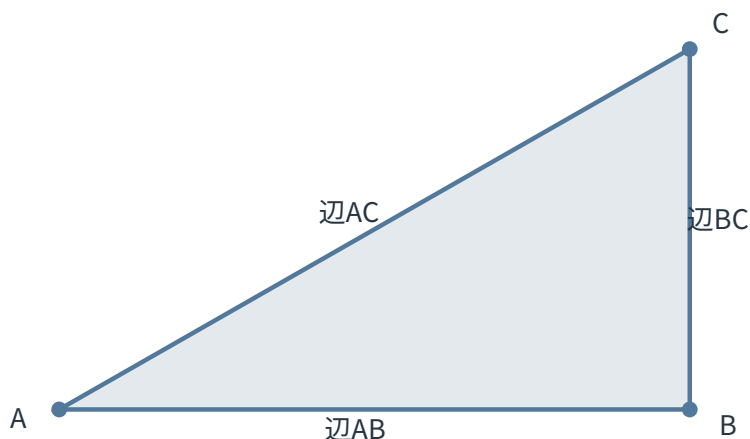


図1 鋭角 A を基準にして 3 辺を見る

角 A を基準にすると、3 辺には次の役割があります。

- 直角の向かいにある最も長い辺 AC
- 角 A の向かいにある辺 BC
- 角 A に接している、斜めではない辺 AB

三角比では、この 3 辺のうち 2 辺を選び、その長さの比を考えます。

辺の役割は基準にする角で決まる

斜辺は、どの鋭角を基準にしても同じです。

しかし、残りの 2 辺は、どちらの鋭角を見るかによって役割が入れ替わります。

そのため、三角比の問題では計算を始める前に「どの角を基準にしているか」を確認します。

なぜ角が同じなら辺の比が同じなのか

直角ともう 1 つの角が決まれば形が決まる

2 つの直角三角形で、どちらにも直角があり、さらに鋭角 A の大きさも同じだとします。

三角形の内角の和は 180° なので、残りの角の大きさも同じになります。

したがって、2 つの三角形は相似です。

相似な図形では、対応する辺の長さの比が等しいので、三角形全体の大きさが変わっても、対応する 2 辺の比は一定です。

これが三角比を使える根拠です。

三角比

直角三角形で、1 つの鋭角を基準にしてつくられる辺の長さの比を**三角比**といいます。

同じ大きさの鋭角については、直角三角形の大きさが変わっても、対応する三角比は変わりません。

三角比の本質

三角比は、三角形そのものの大きさを表すものではありません。

角の大きさによって決まる、**辺と辺の長さの比**です。

そのため、大きな三角形でも小さな三角形でも、基準となる角が同じなら同じ三角比をもちます。

辺の比を実際に調べる

3 辺が 3, 4, 5 の直角三角形

直角三角形 ABC で、 $AB = 4$ 、 $BC = 3$ 、 $AC = 5$ とします。 $\angle B = 90^\circ$ です。

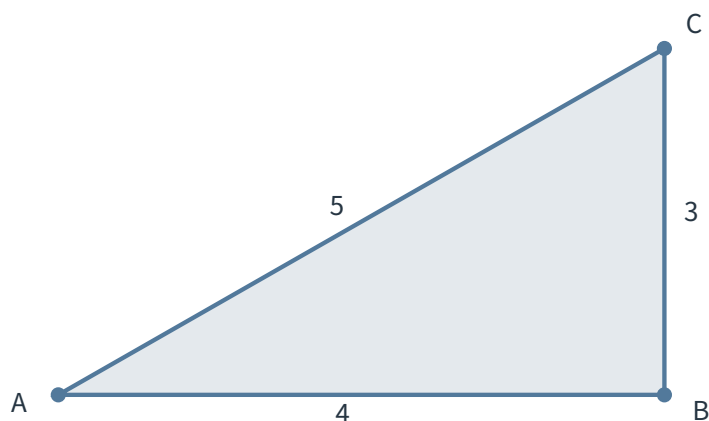


図 2 辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形

角 A を基準にすると、3 辺から次のような比をつくれます。

$$\frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

また、

$$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

さらに、

$$\frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

です。

このように、同じ角を基準にしても、どの 2 辺を比べるかによって 3 種類の基本的な比ができます。

次の講では、この 3 種類の比にそれぞれ名前と記号を付けて整理します。

三角比を使うと何ができるのか

測りにくい長さを、角と比から考えられる

建物の高さのように、直接ものさしを当てにくい長さを考えてみます。

地面上のある地点から建物の頂上を見ると、地面・建物・視線によって直角三角形を考えられます。このとき、見る角度が分かれば、その角に対応する辺の比が決まります。さらに地面上の距離など、1つの辺の長さが分かれば、辺の比を利用して未知の長さを求められるようになります。三角比は、**角度の情報を長さの情報へ変換する道具**として使われます。

この段階では角だけから長さそのものは決まらない

角 A が同じでも、直角三角形は拡大・縮小できます。
したがって、角の大きさだけから辺の長さそのものは決まりません。
決まるのは、対応する辺どうしの**比**です。
実際の長さを求めるには、角の情報に加えて、少なくとも1つの長さの情報が必要です。

例題

例題 1

直角三角形 ABC で、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 8$ 、 $BC = 6$ 、 $AC = 10$ とする。
角 A を基準にして、次の比を求めなさい。

- (1) $\frac{BC}{AC}$
- (2) $\frac{AB}{AC}$
- (3) $\frac{BC}{AB}$

例題 1 の解答・解説

与えられた辺の長さをそのまま対応させます。

- (1) $\frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ です。
- (2) $\frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ です。
- (3) $\frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ です。

辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形を 2 倍した形なので、比は元の三角形と同じになります。

例題 2

2つの直角三角形について、どちらも1つの鋭角が A である。
1つ目の三角形では、角 A の向かいの辺の長さが 5、斜辺の長さが 13 である。
2つ目の三角形の斜辺の長さが 26 のとき、角 A の向かいの辺の長さを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

2つの直角三角形は、直角と鋭角 A がそれぞれ等しいので相似です。
したがって、対応する辺の比は同じです。
斜辺は 13 から 26 へ 2 倍になっています。
よって、角 A の向かいの辺も 5 の 2 倍です。
したがって、求める長さは 10 です。

例題 3

ある直角三角形で、1つの鋭角を A とする。
角 A の向かいの辺の長さ と 斜辺の長さの比が $\frac{2}{3}$ である。
斜辺の長さが 15 のとき、角 A の向かいの辺の長さを求めなさい。

例題 3 の解答・解説

角 A の向かいの辺の長さを x とします。
与えられた比から、 $\frac{x}{15} = \frac{2}{3}$ です。
両辺に 15 を掛けると、 $x = 10$ となります。
したがって、求める長さは 10 です。
三角比によって辺の比が分かれば、1つの辺の長さから対応する辺の長さを求められます。

演習問題**練習問題 1**

直角三角形 ABC で、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 12$ 、 $BC = 5$ 、 $AC = 13$ とする。
角 A を基準にして、次の比を求めなさい。

- (1) $\frac{BC}{AC}$
- (2) $\frac{AB}{AC}$
- (3) $\frac{BC}{AB}$

練習問題 2

直角三角形 ABC で、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 9$ 、 $BC = 12$ 、 $AC = 15$ とする。
角 A を基準にしたとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 斜辺はどの辺か。
- (2) 角 A の向かいにある辺はどの辺か。
- (3) $\frac{BC}{AC}$ を求めなさい。

練習問題 3

2つの直角三角形は相似である。
小さい三角形の対応する 3 辺の長さが 3, 4, 5 で、大きい三角形の斜辺の長さが 20 である。
大きい三角形の残り 2 辺の長さを求めなさい。

練習問題 4

同じ大きさの鋭角 A をもつ 2つの直角三角形がある。
1つ目では、角 A の向かいの辺の長さが 4、斜辺が 5 である。
2つ目では、斜辺が 15 である。
2つ目の三角形で、角 A の向かいの辺の長さを求めなさい。

練習問題 5

ある直角三角形で、角 A に接する斜辺以外の辺の長さ、斜辺の長さの比が $\frac{3}{5}$ である。斜辺の長さが 20 のとき、角 A に接する斜辺以外の辺の長さを求めなさい。

練習問題 6

ある生徒は、「同じ角 A をもつ直角三角形なら、対応する辺の長さそのものがいつも等しい」と考えました。

この考えが誤っている理由を、相似と辺の比に触れながら説明しなさい。

練習問題 7

次のうち、三角比について正しいものをすべて選びなさい。

- ・ (ア) 同じ大きさの鋭角をもつ直角三角形では、対応する辺の長さの比は一定である。
- ・ (イ) 三角形を 2 倍に拡大すると、対応する辺の比も 2 倍になる。
- ・ (ウ) 三角比を考えると、どの鋭角を基準にするかを確認する必要がある。
- ・ (エ) 角の大きさだけが分かれば、直角三角形の各辺の長さはすべて 1 通りに決まる。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

(1) $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$ です。

(2) $\frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$ です。

(3) $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$ です。

角 A を基準にして、どの 2 辺を比較しているかを確認してから値を代入します。

練習問題 2 の解答・解説

(1) 直角の向かいにある辺が斜辺なので、斜辺は AC です。

(2) 角 A の向かいにある辺は BC です。

(3) $BC = 12$ 、 $AC = 15$ なので、 $\frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

小さい三角形の斜辺は 5、大きい三角形の斜辺は 20 なので、大きさは 4 倍です。

したがって、残りの辺もそれぞれ 4 倍になります。

$3 \times 4 = 12$ 、 $4 \times 4 = 16$ です。

よって、大きい三角形の残り 2 辺の長さは 12 と 16 です。

練習問題 4 の解答・解説

2 つの三角形では鋭角 A が等しいので、対応する辺の比が同じです。

斜辺は 5 から 15 へ 3 倍になっています。

したがって、角 A の向かいの辺も 4 の 3 倍になります。

よって、求める長さは 12 です。

練習問題 5 の解答・解説

求める辺の長さを x とします。

条件から、 $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$ です。

両辺に 20 を掛けると、 $x = 12$ です。

したがって、求める長さは 12 です。

練習問題 6 の解答・解説

同じ鋭角 A をもつ直角三角形は相似なので、形は同じです。

しかし、相似な三角形は拡大・縮小できるため、対応する辺の長さそのものが等しいとは限りません。

変わらないのは、対応する辺どうしの**比**です。

したがって、「対応する辺の長さそのものがいつも等しい」という考えは誤りです。

練習問題 7 の解答・解説

(ア) は正しいです。同じ大きさの鋭角をもつ直角三角形は相似なので、対応する辺の比は一定です。

(イ) は誤りです。すべての対応する辺が 2 倍になるため、辺どうしの比は変わりません。

(ウ) は正しいです。斜辺以外の 2 辺の役割は、どの鋭角を基準にするかで変わります。

(エ) は誤りです。同じ角をもつ直角三角形は拡大・縮小できるため、角だけでは各辺の長さそのものは決まりません。

したがって、正しいものは (ア)、(ウ) です。