

第 33 講 定義域がある最大・最小

学習目標

- ・ 閉区間の定義域がある二次関数で、最大値・最小値の候補を判断できる。
- ・ 頂点が定義域に含まれるかを確認できる。
- ・ 頂点と定義域の両端での関数値を比較して、最大値・最小値を求められる。
- ・ 最大値・最小値だけでなく、その値をとる x も答えられる。

定義域があると「頂点だけ」では決められない

見る範囲が限られている

二次関数

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

は上に開き、頂点は $(2, 1)$ です。

定義域が実数全体なら、 $x = 2$ のとき最小値 1 をとり、最大値はありません。

しかし、定義域が

$$0 \leq x \leq 4$$

のように限られている場合は、グラフのうち $0 \leq x \leq 4$ の部分だけを見ます。

この範囲では頂点だけでなく、区間の両端 $x = 0, 4$ も最大値・最小値の候補になります。

つまり、定義域がある問題では、**頂点と両端を候補として調べる**ことが基本です。

最初に候補を決める

閉区間 $l \leq x \leq r$ で二次関数の最大値・最小値を求めるときは、

- ・ 左端 $x = l$
- ・ 右端 $x = r$
- ・ 頂点の x 座標が区間内なら頂点

を調べます。

値を計算する前に、どこが候補になるかを定めることが大切です。

頂点が区間内にある場合

頂点と両端の 3 か所を比べる

二次関数

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

について、 $0 \leq x \leq 4$ とします。

頂点の x 座標は 2 であり、

$$0 \leq 2 \leq 4$$

なので、頂点は定義域に含まれます。

そこで、 $x = 0, 2, 4$ の関数値を調べます。

$x = 0$ のとき $y = 5$ 、 $x = 2$ のとき $y = 1$ 、 $x = 4$ のとき $y = 5$ です。

したがって、 $x = 0, 4$ のとき最大値 5、 $x = 2$ のとき最小値 1 をとります。

頂点が区間内なら 3 か所を確認

頂点が定義域に含まれる場合は、

左端・頂点・右端

の関数値を求めて比較します。

左右の端の値が同じになるとは限らないので、両方を計算します。

頂点が区間外にある場合**使えない頂点は候補にしない**

二次関数

$$y = (x - 3)^2 + 2$$

について、 $-1 \leq x \leq 1$ とします。

頂点の x 座標は 3 ですが、3 は定義域に含まれません。

この問題では、頂点 (3, 2) はグラフ全体では重要な点ですが、今回見る範囲の外にあります。

したがって、最大値・最小値の候補は両端 $x = -1, 1$ です。

$x = -1$ のとき $y = 18$ 、 $x = 1$ のとき $y = 6$ なので、最大値は 18、最小値は 6 です。

頂点があるから必ず使うわけではない

平方完成して頂点を求めても、頂点の x 座標が定義域の外なら、その点で最大値・最小値をとることはできません。

必ず、

頂点の x 座標が定義域に入っているか

を確認します。

上に開く場合も下に開く場合も考え方は同じ**候補を出して値を比較する**

下に開く二次関数でも手順は変わりません。

たとえば、

$$y = -(x - 1)^2 + 4$$

で $-1 \leq x \leq 3$ とします。

頂点の x 座標 1 は区間内です。

$x = -1$ のとき $y = 0$ 、 $x = 1$ のとき $y = 4$ 、 $x = 3$ のとき $y = 0$ です。

したがって、 $x = 1$ のとき最大値 4、 $x = -1, 3$ のとき最小値 0 をとります。

「上に開くから最小値だけを見る」「下に開くから最大値だけを見る」ではありません。

定義域が閉区間なら、両端があるため、最大値と最小値の両方を考えます。

定義域がある最大・最小の手順

1. 平方完成して頂点の x 座標を求める。
2. 頂点が定義域に含まれるか確認する。
3. 定義域の左端と右端の関数値を求める。
4. 頂点が区間内なら、頂点での関数値も求める。
5. 候補の値を比較し、最大値・最小値を決める。
6. それぞれの値をとる x も答える。

候補を先に書くとミスが減る**計算前に場所を整理する**

たとえば、

$$y = x^2 - 4x + 1$$

で $0 \leq x \leq 5$ とします。

平方完成すると、

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

です。

頂点の x 座標は 2 で、定義域に含まれています。

したがって、計算すべき候補は $x = 0, 2, 5$ です。

この 3 つを先に書いてから関数値を求めれば、端点の計算漏れや、区間外の点を使うミスを防ぎやすくなります。

端点を片方だけ調べない

放物線は軸について対称ですが、定義域の左右の端が軸から同じ距離にあるとは限りません。そのため、左端と右端の両方を確認します。

例題**例題 1**

二次関数

$$y = (x - 1)^2 + 2$$

について、 $-1 \leq x \leq 3$ のときの最大値と最小値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

頂点の x 座標は 1 で、定義域に含まれます。

したがって、 $x = -1, 1, 3$ を調べます。

$x = -1$ のとき $y = 6$ 、 $x = 1$ のとき $y = 2$ 、 $x = 3$ のとき $y = 6$ です。

よって、 $x = -1, 3$ のとき最大値 6、 $x = 1$ のとき最小値 2 をとります。

例題 2

二次関数

$$y = x^2 - 6x + 5$$

について、 $0 \leq x \leq 2$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**例題 2 の解答・解説**

平方完成すると、

$$y = (x - 3)^2 - 4$$

です。

頂点の x 座標 3 は定義域 $0 \leq x \leq 2$ に含まれません。したがって、両端 $x = 0, 2$ を調べます。 $x = 0$ のとき $y = 5$ 、 $x = 2$ のとき $y = -3$ です。よって、 $x = 0$ のとき最大値 5、 $x = 2$ のとき最小値 -3 をとります。**例題 3**

二次関数

$$y = -x^2 + 4x + 1$$

について、 $0 \leq x \leq 5$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**例題 3 の解答・解説**

平方完成すると、

$$y = -(x - 2)^2 + 5$$

です。

頂点の x 座標 2 は定義域に含まれるので、 $x = 0, 2, 5$ を調べます。関数値は順に 1, 5, -4 です。したがって、 $x = 2$ のとき最大値 5、 $x = 5$ のとき最小値 -4 をとります。**演習問題****練習問題 1**

二次関数

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

について、 $0 \leq x \leq 4$ のときの最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 2

二次関数

$$y = -(x + 1)^2 + 3$$

について、 $-3 \leq x \leq 1$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**練習問題 3**

二次関数

$$y = x^2 - 4x + 5$$

について、 $0 \leq x \leq 5$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**練習問題 4**

二次関数

$$y = x^2 + 6x + 4$$

について、 $-2 \leq x \leq 1$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**練習問題 5**

二次関数

$$y = -x^2 + 2x + 8$$

について、 $-2 \leq x \leq 4$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**練習問題 6**

二次関数

$$y = 2x^2 - 8x + 3$$

について、 $3 \leq x \leq 6$ のときの最大値と最小値を求めなさい。**練習問題 7**

二次関数

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

について、 $-4 \leq x \leq 1$ のときの最大値と最小値を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、二次関数

$$y = (x - 4)^2 - 2$$

について、 $0 \leq x \leq 2$ のとき「頂点は $(4, -2)$ だから最小値は -2 」と答えました。
この答えの誤りを説明し、正しい最大値と最小値を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

頂点の x 座標 2 は定義域に含まれます。

候補は $x = 0, 2, 4$ です。

関数値は順に 5, 1, 5 です。

したがって、 $x = 0, 4$ のとき最大値 5、 $x = 2$ のとき最小値 1 をとります。

練習問題 2 の解答・解説

頂点の x 座標は -1 で、定義域に含まれます。

候補は $x = -3, -1, 1$ です。

関数値は順に $-1, 3, -1$ です。

したがって、 $x = -1$ のとき最大値 3、 $x = -3, 1$ のとき最小値 -1 をとります。

練習問題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

です。

候補は $x = 0, 2, 5$ です。

関数値は順に 5, 1, 10 です。

したがって、 $x = 5$ のとき最大値 10、 $x = 2$ のとき最小値 1 をとります。

練習問題 4 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x + 3)^2 - 5$$

です。

頂点の x 座標 -3 は定義域 $-2 \leq x \leq 1$ の外です。

したがって、 $x = -2, 1$ を調べます。

関数値はそれぞれ $-4, 11$ です。

よって、 $x = 1$ のとき最大値 11、 $x = -2$ のとき最小値 -4 をとります。

練習問題 5 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -(x - 1)^2 + 9$$

です。

候補は $x = -2, 1, 4$ です。

関数値は順に $0, 9, 0$ です。

したがって、 $x = 1$ のとき最大値 9 、 $x = -2, 4$ のとき最小値 0 をとります。

練習問題 6 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = 2(x - 2)^2 - 5$$

です。

頂点の x 座標 2 は定義域 $3 \leq x \leq 6$ の外です。

$x = 3$ のとき $y = -3$ 、 $x = 6$ のとき $y = 27$ です。

したがって、 $x = 6$ のとき最大値 27 、 $x = 3$ のとき最小値 -3 をとります。

練習問題 7 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -2(x + 1)^2 + 7$$

です。

候補は $x = -4, -1, 1$ です。

関数値は順に $-11, 7, -1$ です。

したがって、 $x = -1$ のとき最大値 7 、 $x = -4$ のとき最小値 -11 をとります。

練習問題 8 の解答・解説

頂点の x 座標は 4 ですが、定義域は $0 \leq x \leq 2$ です。

したがって、頂点 $(4, -2)$ は今回の範囲に含まれず、最小値の候補にはできません。

両端を調べると、 $x = 0$ のとき $y = 14$ 、 $x = 2$ のとき $y = 2$ です。

したがって、 $x = 0$ のとき最大値 14 、 $x = 2$ のとき最小値 2 をとります。