第 207 講 三角関数の積分

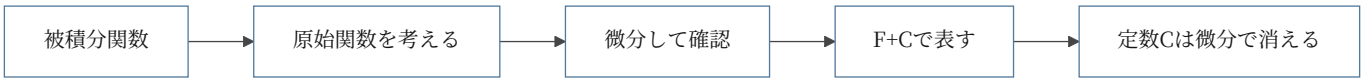
学習目標

この講では、不定積分における三角関数の扱い方を理解することを目標とする。

- $\sin x$、$\cos x$ の原始関数を微分との関係から確認できる。
- a, bを実定数とし、$a \neq 0$のとき、$\sin(ax+b)$や$\cos(ax+b)$の積分で係数の逆数が必要になる理由を説明できる。
- $\frac{1}{\cos^2 x}$、$\sin^2 x$、$\sin x \cos x$を変形して積分できる。
- 積分定数Cを含む不定積分の答えを正確に表現できる。

不定積分と原始関数

不定積分は、ある関数を微分すると元の関数になる関数全体を求める操作である。
対象となる連結な開区間上で、$F'(x) = f(x)$を満たす 1 つの原始関数を$F(x)$とすると、$f(x)$の原始関数全体は$F(x) + C$で表される。ここでCは任意の実定数である。
例えば、$\cos x$を微分すると$-\sin x$になるため、$-\cos x$を微分すると$\sin x$になる。
したがって、$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$である。
三角関数の積分では、公式を暗記するだけではなく、微分して元の関数になるかを確認することが重要である。



この図は、不定積分で求める対象が単なる 1 つの関数ではなく、同じ導関数をもつ関数全体であることを表している。
対象となる連結な開区間上の 2 つの原始関数を$F(x)$、$G(x)$とすると、$G'(x) - F'(x) = 0$である。つまり、差$G(x) - F(x)$の導関数は 0 になる。連結な開区間上で導関数が常に 0 の関数は定数であるため、$G(x) - F(x) = C$となる。ここでCは任意の実定数である。
したがって、原始関数全体は$F(x) + C$と表される。定数を加えても微分すると 0 になるという事実は、この結果を支える具体的な理由の 1 つである。

基本的な三角関数の積分

弧度法で角度を表すと、微分公式$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$と$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$が成り立つ。
これらを逆向きに利用すると、$\int \cos x \, dx = \sin x + C$、$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$である。

係数がある三角関数の積分

a, bを実定数とし、$a \neq 0$とする。
$\sin(ax+b)$や$\cos(ax+b)$では、内部の式$ax+b$を微分するとaが現れる。そのため、積分するときには$\frac{1}{a}$を掛けて係数を調整する。
実際に、$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\cos(ax+b)\right) = \sin(ax+b)$であり、$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right) = \cos(ax+b)$である。
したがって、$\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$、$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$である。

©ミライコーチング

弧度法と定義域

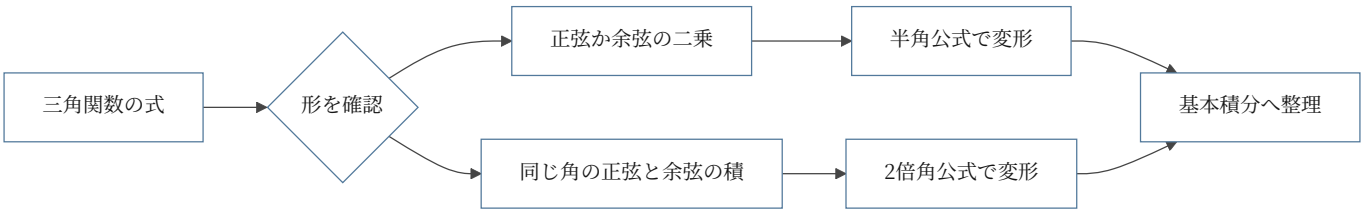
三角関数の微分・積分では、角度は弧度法で扱う。
また、$\frac{1}{\cos^2 x}$を扱う場合は、$\cos x \neq 0$となる区間で考える必要がある。これは$\tan x$が定義される区間で考えるためである。
不定積分では、積分定数Cを忘れずに付ける必要がある。

正接を含む形の積分

$\frac{1}{\cos^2 x}$は正接の微分公式を利用できる形である。
$\cos x \neq 0$となる区間では、$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$が成り立つ。
したがって、$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$である。

三角関数の二乗や積の変形

三角関数の二乗や積は、そのままでは積分しにくい場合がある。
半角公式$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$と$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$を利用すると、二乗を含む式を基本的な三角関数の形へ変形できる。
また、$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$と変形すると、基本的な三角関数の積分へ戻せる。



この図は、複雑に見える三角関数の積分でも、まず式の形を変換してから基本公式へ戻すという判断手順を示している。例えば、$\sin^2 x$を$\frac{1-\cos 2x}{2}$へ変形すると、定数部分と$\cos 2x$の積分に分けられる。図は変形の流れを示すものであり、半角公式そのものを証明するものではない。

例題 1

$\int \sin x\,dx$を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

$\sin x$の原始関数を考える。
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$であるため、$-\cos x$は$\sin x$の原始関数の 1 つである。
したがって、$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$である。ここで$C$は任意の実定数である。
微分して確認すると、$\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$となり、元の被積分関数に戻る。

例題 2

a, bを実定数とし、$a \neq 0$とする。
$\int \cos(ax+b)\,dx$を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

内部の式$ax+b$を微分するとaになるため、係数を調整する必要がある。
$\frac{1}{a}$を用いて微分を確認する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right) = \frac{1}{a}\cdot a\cos(ax+b)$$
$$= \cos(ax+b)$$

したがって、$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$である。ここで$C$は任意の実定数である。
係数aがある理由は、合成関数の微分で内部の微分aが現れるためである。

例題 3

$\cos x \neq 0$となる連結な開区間で、$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$\frac{1}{\cos^2 x}$は正接の微分公式を利用できる形である。
$\cos x \neq 0$となる連結な開区間では$\tan x$が定義され、$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$である。
したがって、$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$である。ここで$C$は任意の実定数である。
微分して確認すると、$\frac{d}{dx}(\tan x + C) = \frac{1}{\cos^2 x}$となり、元の被積分関数に戻る。
区間を指定するのは、$\cos x = 0$となる点では$\tan x$が定義されず、1 つの原始関数として扱えないためである。

演習 1

$\int \cos x\,dx$を求めなさい。

演習 2

$\int \sin(3x+1)\,dx$を求めなさい。

演習 3

$\int \cos(2x-1)\,dx$を求めなさい。

演習 4

$\int \sin^2 x\,dx$を求めなさい。

演習 5

$\int \cos^2 x\,dx$を求めなさい。

©ミライコーチング

演習 6

$\int \sin x \cos x \, dx$を求めなさい。

演習 7

$\cos(2x) \neq 0$となる連結な開区間で、$\int \frac{1}{\cos^2(2x)} \, dx$を求めなさい。

演習 8

a, bを実定数とし、$a \neq 0$かつ$a \neq 1$とする。$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) + C$という解答が誤りである理由を説明し、正しい形を示しなさい。

演習 1 の解答・解説

$\cos x$は$\sin x$を微分した形である。
したがって、$\int \cos x \, dx = \sin x + C$である。ここで$C$は任意の実定数である。
微分すると、$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$となり確認できる。

演習 2 の解答・解説

内部の式$3x+1$の微分が3になるため、係数の逆数を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x+1)\right) &= -\frac{1}{3}\cdot(-3\sin(3x+1)) \\ &= \sin(3x+1)\end{aligned}$$

したがって、$\int \sin(3x+1) \, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$である。

演習 3 の解答・解説

内部の式$2x-1$の微分が2になるため、係数の逆数を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right) &= \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x-1) \\ &= \cos(2x-1)\end{aligned}$$

したがって、$\int \cos(2x-1) \, dx = \frac{1}{2}\sin(2x-1) + C$である。

演習 4 の解答・解説

二乗の形なので半角公式を使う。
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$である。

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

微分すると、$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$となる。

演習 5 の解答・解説

二乗の形なので半角公式を使う。
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$である。

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

微分すると、$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$となる。

演習 6 の解答・解説

同じ角の正弦と余弦の積なので、2 倍角公式を使う。
$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$である。

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

微分すると、$\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$となる。

演習 7 の解答・解説

$\cos(2x) \neq 0$となる連結な開区間で考える。
$\tan(2x)$を微分すると内部の微分2が現れるため、係数を調整する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan(2x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cos^2(2x)}$$
$$= \frac{1}{\cos^2(2x)}$$

したがって、$\int \frac{1}{\cos^2(2x)}\, dx = \frac{1}{2}\tan(2x) + C$である。

演習 8 の解答・解説

誤りの原因は、内部の式$ax+b$を微分したときに出るaを調整していないことである。
$a \neq 1$なので、提示された$\sin(ax+b)+C$を微分すると、$a\cos(ax+b)$となり、元の被積分関数$\cos(ax+b)$とは一致しない。
正しい形は$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$である。
正しい式を微分して確認する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C\right) = \frac{1}{a}\cdot a\cos(ax+b)$$
$$= \cos(ax+b)$$

微分結果が元の被積分関数と一致するため、修正後の答えは正しい。