

第 174 講 無限等比級数

学習目標

- ・有限の部分 and S_n の極限として、無限等比級数の収束を判断できる。
- ・公比 r の値によって、無限等比級数の和が存在する条件を説明し、和を求められる。

導入

次のような無限に続く足し算を考える。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

項そのものは小さくなる一方、正の項を足した部分 and は増えていく。増え続けても有限値へ近づく場合があり、この例では 1 からの残りが半分ずつになる。このように、数列の各項と、それらを足した部分 and は区別して考える必要がある。

例えば、全体を 1 と考えると、最初に $\frac{1}{2}$ を取った後の残りは $\frac{1}{2}$ であり、その残りからさらに $\frac{1}{4}$ を取る。その後も残りは半分ずつになる。

ただし、4 項までの和は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

であり、有限回でちょうど 1 になるわけではない。無限に続けたときに近づく値を考えることが、無限等比級数の考え方である。

無限等比級数と部分 and

数列 $\{u_n\}$ を、 $u_1 = a$ 、 $u_{n+1} = ru_n$ (n は正整数) によって定める。ただし、 a と r は実定数である。

$a \neq 0$ 、 $r \neq 0$ のとき、 $u_n = ar^{n-1}$ となり、これは 141 で定義した等比数列である。その各項を順に足す級数

$a + ar + ar^2 + \cdots$ を無限等比級数という。

ただし、 $a = 0$ や $r = 0$ の場合は、上の更新規則によって定められる級数として別に扱う。

すべての場合に共通して、初めの n 項の有限和を

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

と定義する。この定義では、 $n = 1$ の場合でも存在しない中間項や 0^0 を用いない。

有限部分 and S_n が有限実数 S へ収束するとき、この級数は収束するといい、その和を S と定める。

S は部分 and の数列の有限な極限であり、 S_n は初めの n 項を足した有限和である。したがって、 S_n と S は定義する対象が異なるが、零列や $r = 0$ の場合のように一致する場合もある。

導出

まず、 $a \neq 0$ 、 $r \neq 0$ の場合を考える。

$r \neq 1$ のとき、142 で扱った有限等比和より

$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ である。この式は $n = 1$ の場合にも成立する。

$0 < |r| < 1$ のとき、173 より

$r^n \rightarrow 0$ であり、 $1-r \neq 0$ だから

$S = \frac{a}{1-r}$ となる。

$r = 1$ のとき、 $S_n = na$ である。 $a > 0$ なら S_n は $+\infty$ へ近づき、 $a < 0$ なら S_n は $-\infty$ へ近づくため、有限値へ収束しない。

$r = -1$ のとき、任意の正整数 m に対して

$$S_{2m-1} = a$$

$S_{2m} = 0$ となる。したがって、部分和は一定の有限値へ近づかない。

$r > 1$ または $r < -1$ のとき、仮に S_n が有限値へ収束するとする。このとき、有限和の式から

$r^n = 1 - \frac{1-r}{a} S_n$ となるため、 r^n も有限値へ収束することになる。しかし、173 で扱った数列の極限と矛盾する。したがって、 S_n は有限値へ収束しない。

なお、更新で定めた場合を確認すると、 $a = 0$ では全ての項が 0 となり、任意の r で和は 0 である。

また、 $a \neq 0, r = 0$ では数列は $a, 0, 0, \dots$ となり、 $S_n = a$ 、和は a である。

したがって、この更新で定めた級数について、 $a \neq 0$ なら収束の必要十分条件は $|r| < 1$ であり、その範囲で和は $\frac{a}{1-r}$ である。

注意

- 有限和の公式は、まず S_n という有限個の和についての公式である。無限級数へそのまま代入するのではなく、 n を無限に大きくした極限を考える。
- $r \neq 1$ だからといって、必ず無限等比級数の和が存在するわけではない。 r^n の極限を確認する必要がある。
- 収束しない場合の無限級数の和を、0 や負の有限値として決めることはできない。

例題 1

無限等比級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 収束するか調べ、収束する場合は和を求めなさい。
- (2) 第 4 項までの有限和 S_4 と、無限に続けた場合の和との差を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

(1) 初項は $a = \frac{1}{2}$ 、公比は $r = \frac{1}{2}$ である。

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ であるため収束する。

したがって、和は

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(2) 第 4 項までの有限和は

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

より、 $S_4 = \frac{15}{16}$ である。

したがって、

$$S - S_4 = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

である。

一般に、部分和は $S_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$ であり、有限な n では $S_n < 1$ である。残りの部分 $(\frac{1}{2})^n$ は 0 へ近づき、部分和全体が 1 へ近づくことを表している。



図 1 全長 1 の帯を、最初の 4 項 $1/2$ 、 $1/4$ 、 $1/8$ 、 $1/16$ と残り $1/16$ に分けた。最初の 4 項の部分 and は $15/16$ であり、第 4 項と残りの幅は等しい。これは有限 4 項までを示す図である。無限和が 1 になることの証明は、本文の部分 and の極限計算による。

例題 2

無限等比級数

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \cdots$$

について、収束するか調べ、収束する場合は和を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

初項は $a = 3$ 、公比は $r = -\frac{1}{2}$ である。

公比について、 $|r| = \frac{1}{2} < 1$ であるため収束する。

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{3}{1+\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

負の公比の場合でも、絶対値が 1 未満であれば項の大きさは小さくなり、部分和は一定の値へ近づく。

例題 3

次の無限級数について、有限の和が存在しない理由を部分和を用いて説明しなさい。

(1)

$$1 + 2 + 4 + \cdots$$

(2)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

例題 3 の解答・解説

(1) 初項 $a = 1$ 、公比 $r = 2$ である。

部分和は $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ より、 $S_n = 2^{n+1} - 1$ となる。

n が大きくなると 2^n は限りなく大きくなるため、部分和は有限の値へ近づかない。

したがって、無限級数の和は存在しない。

(2) 部分和を考えると、任意の正整数 m に対して

$$S_{2m-1} = 1$$

$S_{2m} = 0$ となる。どの番号より先にも異なる値の部分和が存在するため、部分和は有限値へ収束せず、この無限級数には通常の意味での和は存在しない。

演習問題

練習問題 1

無限等比級数

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$$

について、表示した公比で無限に続くものとして、収束するか調べ、収束する場合は和を求めなさい。

練習問題 2

無限等比級数

$$2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \cdots$$

について、表示した公比で無限に続くものとして、収束するか調べ、収束する場合は和を求めなさい。

練習問題 3

無限等比級数

$$-3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \cdots$$

について、表示した公比で無限に続くものとして、収束するか調べ、収束する場合は和を求めなさい。

練習問題 4

無限等比級数

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$

について、表示した公比で無限に続くものとして、次の問いに答えなさい。

- (1) 無限等比級数の和 S を求めなさい。
- (2) 第 3 項までの有限和 S_3 を求め、 $S - S_3$ を求めなさい。

練習問題 5

無限等比級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

について、表示した公比で無限に続くものとして、次の問いに答えなさい。

- (1) 一般項 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ の極限を求めなさい。
- (2) 部分和 S_n の極限を求めなさい。
- (3) u_n の極限と S_n の極限が異なる量である理由を説明しなさい。

練習問題 6

無限等比級数

$3 + 6 + 12 + \cdots$ について、表示した公比で無限に続くものとして、次の誤った考えを訂正しなさい。

「公比が 2 だから、公式 $\frac{a}{1-r}$ に $a = 3, r = 2$ を代入すると、和は $\frac{3}{1-2} = -3$ である。」

練習問題 7

実数 r に対して、 $u_1 = 2, u_{n+1} = ru_n$ (n は正整数)

で定められる数列の各項を順に足した級数について、有限値に収束する r の範囲と、そのときの和を求めなさい。

ただし、 $r = 0$ の場合は $2, 0, 0, \cdots$ となることを確認し、 0^0 は用いないこと。

練習問題 8

実数 r に対して、 $u_1 = 0, u_{n+1} = ru_n$ (n は正整数)

で定められる数列の各項を順に足した級数について、収束するか調べ、和を求めなさい。

「この更新で定めた級数が収束するには、初項の値に関係なく必ず $|r| < 1$ が必要である」という主張が正しいかどうかを説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

初項は $a = 4$ 、公比は $r = \frac{1}{3}$ である。

$|r| = \frac{1}{3} < 1$ であるため収束する。

したがって、和は

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{4}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

初項は $a = 2$ 、公比は $r = -\frac{1}{3}$ である。

$|r| = \frac{1}{3} < 1$ であるため収束する。

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{1 + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

公比が負の場合でも、絶対値が 1 未満なら部分和は一定の値へ近づく。

練習問題 3 の解答・解説

初項は $a = -3$ 、公比は $r = \frac{1}{2}$ である。

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ であるため収束する。

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{-3}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= -6 \end{aligned}$$

である。

初項が負であっても、公比の条件を満たせば無限等比級数の和は存在する。

練習問題 4 の解答・解説

初項は $a = \frac{1}{4}$ 、公比は $r = \frac{1}{4}$ である。

$|r| = \frac{1}{4} < 1$ であるため収束する。

(1) 無限等比級数の和は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(2) 第 3 項までの有限和は、

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$$

であり、 $S_3 = \frac{21}{64}$ となる。

したがって、

$$\begin{aligned} S - S_3 &= \frac{1}{3} - \frac{21}{64} \\ &= \frac{1}{192} \end{aligned}$$

である。

今回計算した差は $S - S_3 = \frac{1}{192} > 0$ であるから、 $S_3 < S$ となり一致しない。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 一般項は $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

である。

(2) 部分和は、

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

より、 $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ となる。

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

である。

(3) u_n は第 n 項の値、 S_n は初めの n 項を足した値であり、それぞれ異なる対象である。

項そのものは 0 に近づくが、部分和はそれまでに積み重ねた値であるため、異なる極限を持つ。

練習問題 6 の解答・解説

誤りは、有限値へ収束する条件を確認せずに無限等比級数の和の公式を使っている点である。

初項は $a = 3$ 、公比は $r = 2$ である。

部分和は、 $S_n = 3 \frac{1-2^n}{1-2}$ より、 $S_n = 3(2^n - 1)$ となる。

n が大きくなると 2^n は限りなく大きくなるため、 S_n

は有限値へ近づかない。

したがって、この無限等比級数は発散し、和を -3 と定めることはできない。

今回の初項 3 は非零であり、公式 $\frac{a}{1-r}$ は $|r| < 1$ の場合にだけ使えるため、公比 $r = 2$ の場合には適用できない。

練習問題 7 の解答・解説

$r = 0$ のとき、数列は $2, 0, 0, \dots$ となるため、和は 2 である。

$r = 1$ のとき、各項はすべて 2 であるから、 $S_n = 2n$ となり、有限値へ収束しない。

$r \neq 0, 1$ のとき、部分和は $S_n = 2 \frac{1-r^n}{1-r}$ である。

$|r| < 1$ のとき $r^n \rightarrow 0$ であるから、 $S = \frac{2}{1-r}$ となる。

$r = -1$ のとき、部分和は奇数番目で 2、偶数番目で 0 となり、一定の値へ近づかない。

$r > 1$ または $r < -1$ のときは r^n が有限値へ近づかないため、部分和は有限値へ収束しない。

以上より、有限値へ収束する範囲は $-1 < r < 1$ であり、そのときの和は $S = \frac{2}{1-r}$ である。 $r = 0$ の場合もこの結果に含まれ、和は 2 となる。

練習問題 8 の解答・解説

$u_1 = 0$ とする。

すると、 $u_2 = ru_1 = r \cdot 0 = 0$ となる。

同様に、ある正整数 n で $u_n = 0$ ならば、 $u_{n+1} = ru_n = r \cdot 0 = 0$ である。

したがって、数学的帰納法により、すべての正整数 n について $u_n = 0$ である。

よって、この級数は $0 + 0 + 0 + \dots$ であり、部分和は常に 0 である。

したがって、どのような実数 r でも収束し、和は 0 である。

この主張は誤りである。零初項の場合はすべての項が 0 になるため、 $|r| < 1$ でなくても級数は収束する。一方、 $a \neq 0$ という前提があるときの条件を、そのまま $a = 0$ の更新列へ広げることはいかなる。これは 141 で扱う非零比の等比数列の定義とも矛盾しない。