第 205 講 部分積分の考え方

学習目標

この講では、積の微分公式を逆向きに利用する部分積分の考え方を理解することを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 部分積分の公式が積の微分公式からどのように生まれるかを説明できる。
- 積分する因子と微分する因子を選ぶ理由を説明できる。
- xe^x、$x\cos x$、自然対数$\log x$の基本的な積分で、部分積分を使う判断ができる。

部分積分が必要になる理由

積分では、微分の逆の関係を利用して原始関数を求める。
例えば、x^2のような単独のべき関数は基本公式で処理できる。しかし、xe^xのような積の形では、既習の基本公式にそのまま当てはめることが難しい。
このような積の形を扱うために、積の微分公式を逆向きに利用する。
積の微分公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

は、2 つの関数の変化率を組み合わせた関係を表している。
部分積分では、この関係を利用して、求めたい積分を別の扱いやすい積分へ変換する。

積の微分から部分積分へ

開区間Iでuとvが微分可能であり、導関数が連続であるとする。
積の微分と移項により、次の 2 式が成り立つ。

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)' - u'v = uv'$$

ここで、HをI上で$u'v$の原始関数の 1 つとして選ぶ。つまり、$H' = u'v$である。
積の微分を使うと、次のように確認できる。

$$\begin{aligned}(uv - H)' &= (uv)' - H' \\ &= u'v + uv' - u'v \\ &= uv'\end{aligned}$$

よって、$uv - H$はuv'の原始関数の 1 つであり、次の関係を得る。

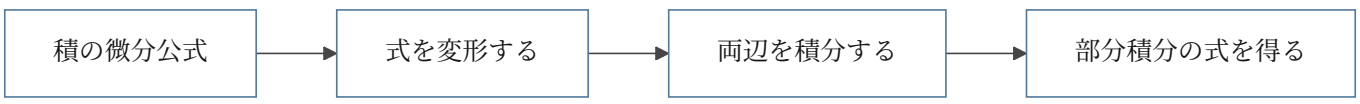
$$\int uv'dx = uv - H + C$$

以下の公式では右辺の積分は原始関数の 1 つを表す。任意定数をCへまとめると次式になる。

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx + C$$

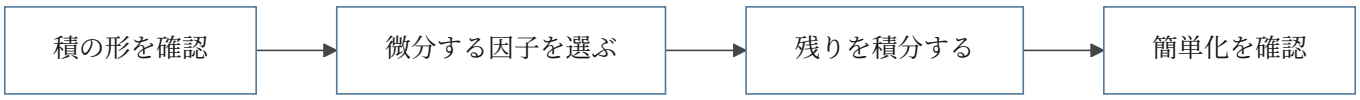
$du = u'(x)dx$、$dv = v'(x)dx$という記法では次式になる。

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C$$



因子を選ぶ基準

部分積分では、積の中のどの因子をuに選ぶかが重要である。
基本的には、微分すると簡単になる因子をuに選び、残った因子をdvに選ぶ。
例えば、xe^xではxを微分すると1になり簡単になる。一方、e^xは積分してもe^xのままである。
そのため、$u=x$、$dv=e^xdx$と選ぶことで、元の積分より簡単な積分へ変換できる。
部分積分では、公式を使えるかだけではなく、変換後の積分が扱いやすくなるかを考えることが大切である。



積分定数について

不定積分では、最後に積分定数Cを加える。
部分積分の途中では複数の積分定数が現れる場合があるが、それらはすべて最後の 1 つの積分定数にまとめられる。
したがって、部分積分による不定積分の答えでは、最後に$+C$を付ける。

部分積分を使う条件

部分積分の公式は、考える 1 つの区間で連続な導関数をもつ関数について成り立つ。
つまり、その区間内で必要な微分が可能であり、導関数が連続であることを前提とする。
また、自然対数$\log x$を扱う場合は定義域に注意する。
$\log x$は$x>0$で定義されるため、部分積分で利用するときも$x>0$の範囲で考える。

例題 1

xe^xの不定積分を求めなさい。

例題 1 の解説

xとe^xの積であるため、部分積分を利用する。
xは微分すると1になり簡単になる。一方、e^xは積分しても形が変わらない。
したがって、$u=x$、$dv=e^xdx$とする。
すると、$du=dx$、$v=e^x$である。
部分積分の公式を使う。

$$\begin{aligned}\int xe^xdx &= xe^x-\int e^xdx\\ &= xe^x-e^x+C\end{aligned}$$

したがって、$\int xe^xdx=e^x(x-1)+C$である。

例題 2

$x\cos x$の不定積分を求めなさい。

例題 2 の解説

xと$\cos x$の積である。
xは微分すると1になるため、uに選ぶ。
また、$\cos x$は積分すると$\sin x$になり扱いやすい。
したがって、$u = x$、$dv = \cos x dx$とする。
すると、$du = dx$、$v = \sin x$である。
部分積分を使うと、

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

したがって、$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$である。

例題 3

自然対数$\log x$の不定積分を求めなさい。ただし$x > 0$とする。

例題 3 の解説

自然対数$\log x$は積の形ではないが、$1 \cdot \log x$と考えることで部分積分の形を作ることができる。$\log x$は微分すると$\frac{1}{x}$になるため、$u = \log x$、$dv = dx$とする。
すると、$du = \frac{1}{x}dx$、$v = x$である。
部分積分を使うと、

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\log x - \int 1 dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

したがって、$\int \log x dx = x\log x - x + C$である。
ここでは、$\log x$をそのまま既習の基本公式へ当てはめるのではなく、$1 \cdot \log x$という積の形として見直すことがポイントである。

演習問題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int xe^{2x}dx$$

部分積分で選んだ因子と、係数$\frac{1}{2}$が現れる理由を示しなさい。

演習問題 2

$x\sin x$の不定積分を求めなさい。
部分積分を使うとき、微分する因子と積分する因子の選択理由を説明しなさい。

©ミライコーチング

演習問題 3

自然対数$\log(2x)$の不定積分を求めなさい。ただし$x > 0$とする。

演習問題 4

次の部分積分の選択について考えなさい。

$$\int xe^x dx$$

で、$u = e^x$、$dv = xdx$と選んだ。
(1) この選択は、部分積分の公式を適用するという意味で数学的に可能か答えなさい。
(2) この選択は、元の積分を簡単にするという目的に対して有利か答えなさい。

演習問題 5

次の計算の誤りを見つけ、正しい答えを求めなさい。

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \sin x + C$$

演習問題 6

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (x+1)e^x dx$$

部分積分でどの因子を選ぶかを説明しなさい。

演習問題 7

次の積分について、部分積分を使う必要があるか判断し、理由を説明しなさい。

$$\int e^x dx$$

演習問題 8

次の式が正しいことを微分して確認しなさい。

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

©ミライコーチング

演習問題 1 の解答・解説

xとe^{2x}の積であるため、部分積分を利用する。
xは微分すると1になるため、$u = x$と選ぶ。
e^{2x}を積分すると、指数の係数2により$\frac{1}{2}e^{2x}$となる。
したがって、$dv = e^{2x}dx$とすると、$du = dx$、$v = \frac{1}{2}e^{2x}$である。
部分積分より、

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}dx &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\end{aligned}$$

したがって、$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C$である。
検算すると、$\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)$を微分してxe^{2x}になるため、答えが確認できる。

演習問題 2 の解答・解説

$x\sin x$は積の形である。
xを微分すると1になるため、$u = x$と選ぶ。
$\sin x$は積分すると$-\cos x$になるため、$dv = \sin x dx$とする。
$du = dx$、$v = -\cos x$である。

$$\begin{aligned}\int x\sin x dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

したがって、$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$である。
選択のポイントは、微分すると簡単になるxを選ぶことである。

演習問題 3 の解答・解説

自然対数$\log(2x)$を部分積分で考える。ただし$x > 0$である。
$\log(2x)$を$1 \cdot \log(2x)$と見て、$\log(2x)$は微分すると$\frac{1}{x}$になるため、$u = \log(2x)$、$dv = dx$と選ぶ。
このとき、$du = \frac{1}{x}dx$、$v = x$である。
部分積分より、

$$\begin{aligned}\int \log(2x)dx &= x\log(2x) - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\log(2x) - \int 1 dx \\ &= x\log(2x) - x + C\end{aligned}$$

微分検算は、$\frac{d}{dx}(x\log(2x) - x) = \log(2x) + 1 - 1 = \log(2x)$である。
したがって、$\int \log(2x)dx = x\log(2x) - x + C$である。

演習問題 4 の解答・解説

(1) この選択は数学的には合法である。
$u = e^x$、$dv = xdx$とすると、$du = e^x dx$、$v = \frac{x^2}{2}$となるため、部分積分の公式を適用できる。

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

(2) しかし、この変換後の積分は元の$\int xe^x dx$より複雑であり、簡単化には不利である。
公式の適用と簡単化は別に判断する。

演習問題 5 の解答・解説

与えられた式の誤りは単なる符号ミスではなく、$\sin x$を積分せずそのまま引いている点にある。
$u = x$、$dv = \cos x dx$とすると、$du = dx$、$v = \sin x$である。
部分積分より、

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

ここで、$\sin x$の原始関数の 1 つが$-\cos x$であるため、$\int \sin x dx = -\cos x$となる。
微分検算は、$\frac{d}{dx}(x\sin x + \cos x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$である。
したがって、正しい答えは$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$である。

演習問題 6 の解答・解説

$(x+1)e^x$は積の形であるため、部分積分を利用する。
$x+1$を微分すると1になるため、$u = x+1$と選ぶ。
指数関数は積分しても形を保つため、$dv = e^x dx$とする。
このとき、$du = dx$、$v = e^x$である。

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x dx &= (x+1)e^x - \int e^x dx \\ &= (x+1)e^x - e^x + C \\ &= xe^x + C\end{aligned}$$

したがって、$\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$である。

演習問題 7 の解答・解説

この積分では、積の形を利用して変換する必要がないため、部分積分は不要である。
e^xは既習の基本公式により、そのまま$\int e^x dx = e^x + C$と積分できる。
部分積分は、積の形を別の積分へ変換するために使う方法である。

演習問題 8 の解答・解説

右辺を微分して確認する。積分定数Cの微分は0である。

$$\frac{d}{dx}(e^x(x-1) + C) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$$

微分結果が被積分関数と一致するため、与えられた不定積分は正しい。

©ミライコーチング