

第 135 講 微分と積分のつながり

学習目標

この講では、微分と積分が互いに逆の関係にあることを理解する。

- ・ 上端を変数にした定積分が、どのような関数を定め、その導関数がどのようなになるかを説明できる。
- ・ 下端で値が 0 になる条件によって、積分から作られる関数が定まる理由を理解できる。
- ・ 微分した関数を定積分すると、端点における原始関数の差になることを利用できる。

積分によって作られる関数

多項式 $f(x)$ と固定された実数 a を考える。 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、上端を変数 x にした定積分

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

を考えることができる。

原始関数の性質より、 $F'(x) = f(x)$ であるから、

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

と表せる。

ここで、 t は積分の中で値を動かすための変数であり、上端の x とは役割が異なる。固定された上下端の定積分とは違い、 $A(x)$ は上端 x を変数として定まる x の関数であり、被積分関数によっては定数関数にもなる。

微分と積分が逆になる理由

$A(x)$ は $F(x) - F(a)$ と表される。 $F(a)$ は定数なので、これを微分すると消える。したがって、

$$\begin{aligned} A'(x) &= (F(x) - F(a))' \\ &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる。

つまり、積分して作った関数を微分すると、積分する前の関数に戻る。

また、 $A(x) = F(x) - F(a)$ であるから、

$$A(a) = F(a) - F(a) = 0$$

となる。同じ導関数をもつ関数は定数だけ異なるため、 $A(x)$ と同じ導関数をもつ関数は $A(x) + K$ の形になる。ここで、 K は x に依存しない実定数である。 $A(x) + K$ が下端 a で 0 になるためには、

$$A(a) + K = 0 + K = 0$$

であり、 $K = 0$ でなければならない。したがって、同じ導関数をもつ原始関数の中から、 $A(a) = 0$ という条件によって一意に $A(x)$ が選ばれる。本講では多項式を全実数域で考えている。

微分と積分の基本関係

上端を変数にした積分では、

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

に対して、

$$A'(x) = f(x)$$

が成り立つ。

一方、微分してから定積分すると、

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$$

となる。

定積分は単に $F(b)$ になるのではなく、上端と下端での関数値の差になる点に注意する。

注意

固定された上下端の定積分 $\int_a^b f(t) dt$ は 1 つの数である。一方、上端を x にした $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ は x の関数である。

また、 $x < a$ の場合も定積分の逆転の定義により同じ関係が成り立つ。

下端を別の固定値に変えると、作られる関数は定数項だけ変化するが、導関数は変わらない。

例題 1

$A(x) = \int_0^x (2t + 1) dt$ を求め、 $A'(x)$ と $A(0)$ を確かめなさい。また、 A の接線の傾きと $f(x) = 2x + 1$ の値の対応を確認しなさい。

例題 1 の解答・解説

$2t + 1$ の原始関数は $t^2 + t$ であるから、

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x (2t + 1) dt \\ &= [t^2 + t]_0^x \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

となる。

したがって、 $A(x) = x^2 + x$ である。

これを微分すると、

$$A'(x) = 2x + 1$$

となり、積分する前の関数に戻ることが確認できる。

また、

$$A(0) = 0^2 + 0 = 0$$

であり、下端と上端が同じ位置では積分値が 0 になる。

さらに、 $x = 0$ のとき A の接線の傾きは $A'(0) = 1$ であり、 $f(0) = 1$ と一致する。 $x = 1$ のときも $A'(1) = 3$ であり、 $f(1) = 3$ と一致する。このように、 A の曲線の各点での接線の傾きは、元の関数 f の値に対応する。

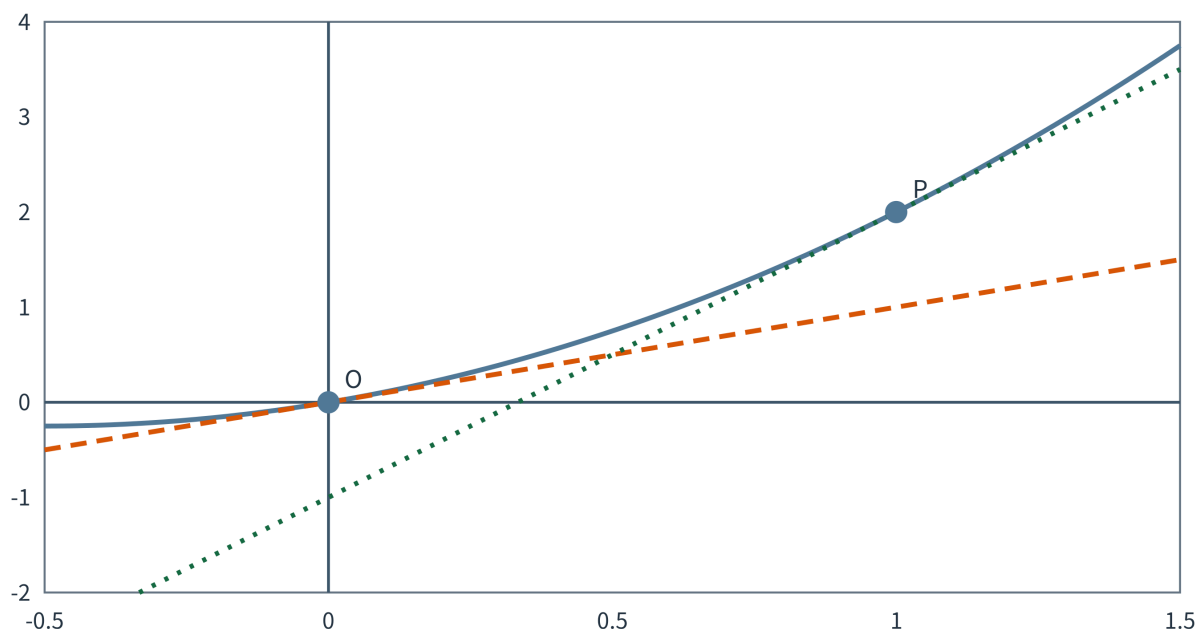


図 1 実線の曲線は $A(x) = \int_0^x (2t+1) dt = x^2 + x$ 。点 $O(0,0)$ での破線の接線は $y = x$ で傾きは 1、点 $P(1,2)$ での点線の接線は $y = 3x - 1$ で傾きは 3 である。横軸は x 、縦軸は y である。縦横の 1 単位の長さは異なるため、傾きは見た目の角度ではなく座標の変化で読む。曲線と接線の定義域は実数全体で、表示はその一部である。点は接点を示す。

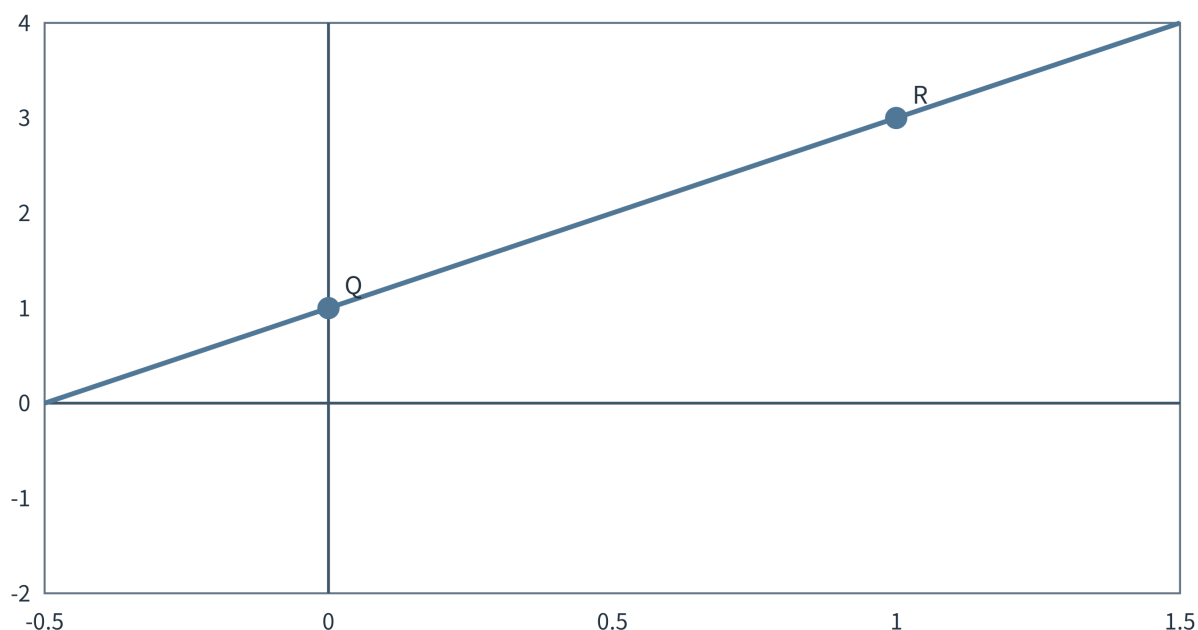


図 2 実線は $y = A'(x) = f(x) = 2x + 1$ 。直前の曲線の $O(0,0)$ と、この直線の $Q(0,1)$ は同じ $x = 0$ に対応し、接線の傾き 1 が高さ 1 になる。同様に $P(1,2)$ と $R(1,3)$ は同じ $x = 1$ に対応し、接線の傾き 3 が高さ 3 になる。元の曲線の高さは 0 と 2 である。横軸は x 、縦軸は導関数の値で、表示範囲と軸の尺度は直前のグラフと同じである。縦横の 1 単位の長さは異なる。定義域は実数全体で、表示はその一部である。

例題 2

$B(x) = \int_1^x 3t^2 dt$ と $C(x) = \int_0^x 3t^2 dt$ を求め、 $B(x) - C(x)$ 、それぞれの導関数、 $B(1)$ を比較しなさい。

例題 2 の解答・解説

$3t^2$ の原始関数は t^3 である。

まず、

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_1^x 3t^2 dt \\ &= [t^3]_1^x \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

となる。

同様に、

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x 3t^2 dt \\ &= [t^3]_0^x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$B(x) - C(x) = (x^3 - 1) - x^3 = -1$$

となる。

下端が 1 と 0 で異なるため、2 つの関数は定数だけ異なる。しかし、導関数はどちらも、

$$B'(x) = 3x^2, \quad C'(x) = 3x^2$$

で一致する。

また、

$$B(1) = 1^3 - 1 = 0$$

であり、積分区間がなくなる位置では値が 0 になる。

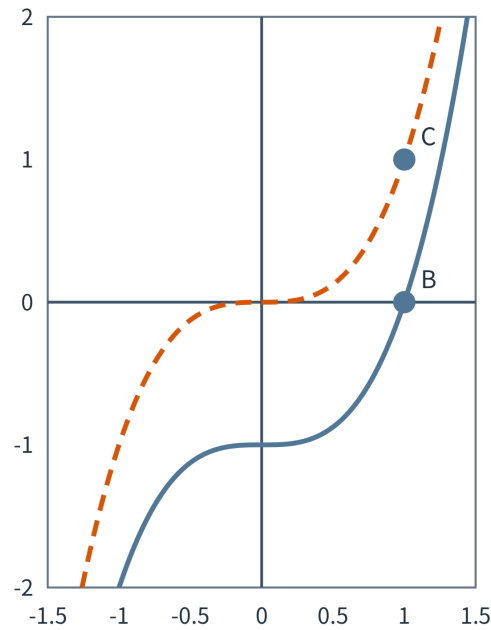


図 3 実線は $B(x) = \int_1^x 3t^2 dt = x^3 - 1$ 、破線は $C(x) = \int_0^x 3t^2 dt = x^3$ 。点 $B(1, 0)$ と $C(1, 1)$ は、それぞれ $B(1) = 0$ と $C(1) = 1$ を示す。

常に $B(x) - C(x) = -1$ であり、どちらの導関数も $3x^2$ となる。固定した下端を変えると加法定数が変わるが、導関数は変わらない。

横軸は x 、縦軸は y で、縦横の 1 単位の長さは等しい。両曲線の定義域は実数全体で、表示はその一部である。

例題 3

$F(t) = t^3 - 3t$ のとき、

$$\int_{-1}^2 F'(t) dt$$

を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

まず、 $F(t)$ を微分すると、

$$F'(t) = 3t^2 - 3$$

である。

微分してから定積分する場合、原始関数である F の端点の差を考える。

$$\int_{-1}^2 F'(t) dt = F(2) - F(-1)$$

ここで、

$$F(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

であり、

$$F(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 F'(t) dt &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

上端を変数にした積分関数でも、原始関数を用いると $F(x) - F(a)$ という端点の差で表される。一方、固定された上下端の定積分は端点が数値で決まるため結果が 1 つの数になり、上端を x にした場合は上端 x を変数として定まる関数になる。ただし、被積分関数が 0 の場合のように、その関数が定数関数になる場合もある。その関数を微分すると、 $F'(x)$ が得られる。

練習問題 1

$A(x) = \int_0^x (4t - 1) dt$ を求め、 $A'(x)$ と $A(0)$ を確認しなさい。

練習問題 2

$B(x) = \int_2^x (3t^2 + 2t) dt$ を求めなさい。また、 $B(2)$ と $B'(x)$ を確認しなさい。

練習問題 3

$C(x) = \int_{-1}^x (2t + 3) dt$ 、 $D(x) = \int_0^x (2t + 3) dt$ を求めなさい。また、 $C(x) - D(x)$ とそれぞれの導関数を比較しなさい。

練習問題 4

$F(t) = t^3 + 2t$ のとき、

$$\int_1^3 F'(t) dt$$

を求めなさい。

練習問題 5

$G(x) = \int_{-2}^x (5t^2 - 4t + 1) dt$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $G(x)$ を求めなさい。
- (2) $G'(x)$ を求め、被積分関数との関係を説明しなさい。
- (3) 積分の中の変数 t と上端の変数 x の役割の違いを説明しなさい。

練習問題 6

次の 2 つの式について、違いを説明しなさい。

$$P = \int_0^2 t^2 dt$$

$$Q(x) = \int_0^x t^2 dt$$

それぞれが数または関数のどちらであることを答え、 $Q'(x)$ も求めなさい。

練習問題 7

$H(x) = \int_3^x 0 dt$ を求めなさい。また、 $H'(x)$ と $H(3)$ を確認し、被積分関数が 0 の場合の積分関数の変化を説明しなさい。

練習問題 8

次の考え方の誤りを指摘し、正しい計算をしなさい。

「 $F(t) = t^2 + 1$ のとき、 $\int_0^2 F'(t) dt$ は上端の値だけを見るので $F(2) = 5$ である。」

練習問題 1 の解答・解説

$4t - 1$ の原始関数は $2t^2 - t$ である。

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x (4t - 1) dt \\ &= [2t^2 - t]_0^x \\ &= 2x^2 - x \end{aligned}$$

したがって、 $A(x) = 2x^2 - x$ である。
微分すると、

$$A'(x) = 4x - 1$$

となり、被積分関数の x に置き換わった形に戻る。
また、

$$A(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 = 0$$

であり、下端と上端が一致すると積分値は 0 になる。

練習問題 2 の解答・解説

$3t^2 + 2t$ の原始関数は $t^3 + t^2$ である。

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_2^x (3t^2 + 2t) dt \\ &= [t^3 + t^2]_2^x \\ &= x^3 + x^2 - (2^3 + 2^2) \\ &= x^3 + x^2 - 12 \end{aligned}$$

したがって、

$$B'(x) = 3x^2 + 2x$$

となり、元の被積分関数に戻る。
また、

$$B(2) = 2^3 + 2^2 - 12 = 0$$

である。

練習問題 3 の解答・解説

$2t + 3$ の原始関数は $t^2 + 3t$ である。

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_{-1}^x (2t + 3) dt \\ &= [t^2 + 3t]_{-1}^x \\ &= x^2 + 3x - \{(-1)^2 + 3(-1)\} \\ &= x^2 + 3x - (-2) \\ &= x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_0^x (2t + 3) dt \\ &= [t^2 + 3t]_0^x \\ &= x^2 + 3x - \{0^2 + 3 \cdot 0\} \\ &= x^2 + 3x \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$C(x) - D(x) = (x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 3x) = 2$$

となる。

下端を変えると、積分によって作られる関数は定数だけ変化する。しかし、

$$C'(x) = 2x + 3, \quad D'(x) = 2x + 3$$

であり、導関数は同じになる。

また、

$$C(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$$

および、

$$D(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$$

となり、それぞれ下端で値が 0 になることも確認できる。

練習問題 4 の解答・解説

$F(t) = t^3 + 2t$ を微分すると、

$$F'(t) = 3t^2 + 2$$

である。

微分した関数を定積分すると、原始関数の端点の差になる。

$$\begin{aligned}\int_1^3 F'(t) dt &= [F(t)]_1^3 \\ &= F(3) - F(1)\end{aligned}$$

ここで、

$$F(3) = 27 + 6 = 33$$

また、

$$F(1) = 1 + 2 = 3$$

である。

したがって、

$$\int_1^3 F'(t) dt = 33 - 3 = 30$$

となる。

定積分は上端の値だけではなく、上端と下端の差で決まる。

練習問題 5 の解答・解説

$5t^2 - 4t + 1$ の原始関数は、

$$\frac{5}{3}t^3 - 2t^2 + t$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{-2}^x (5t^2 - 4t + 1) dt \\ &= \left[\frac{5}{3}t^3 - 2t^2 + t \right]_{-2}^x \\ &= \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + x - \left(-\frac{40}{3} - 8 - 2 \right) \\ &= \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + x + \frac{70}{3}\end{aligned}$$

よって、

$$G'(x) = 5x^2 - 4x + 1$$

であり、積分によって作った関数を微分すると被積分関数に戻る。

また、積分の中の t は積分を計算するための一時的な変数であり、上端の x は積分後に値を変化させる変数である。 t と x は同じ役割ではない。

練習問題 6 の解答・解説

P は上下端が固定された定積分なので、結果は 1 つの数になる。

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

一方、 $Q(x)$ は上端が x で変化するため、 x の関数である。

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x t^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

したがって、

$$Q'(x) = x^2$$

となる。

固定上下端の定積分は数であり、上端を変数にした積分は関数である。

練習問題 7 の解答・解説

被積分関数が 0 なので、

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_3^x 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$H'(x) = 0$$

また、

$$H(3) = 0$$

となる。

積分によって作られる関数でも、被積分関数が常に 0 なら変化は起こらず、常に 0 の関数になる。

練習問題 8 の解答・解説

誤りは、定積分を上端の値だけで決めている点である。

$F(t) = t^2 + 1$ なので、

$$F'(t) = 2t$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^2 F'(t) dt &= [F(t)]_0^2 \\ &= F(2) - F(0)\end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$F(2) = 5, \quad F(0) = 1$$

なので、

$$\int_0^2 F'(t) dt = 5 - 1 = 4$$

である。

$F(2)$ だけを見るのではなく、必ず下端の値 $F(0)$ との差を考える必要がある。