

第 99 講 不等式と領域

学習目標

- 2 変数の不等式を、条件を満たす点の集まりとして捉えられる。
- 不等式から境界を求め、境界を含むか含まないかを判断できる。
- 境界のどちら側が領域になるかを、テスト点の代入で確認できる。
- 円を境界とする不等式について、円の内側・外側と円周を含むかどうかを判断できる。

不等式は平面上の点を選ぶ条件である

2 変数の不等式では、 x と y は平面上の点の座標を表す。

たとえば、点 (a, b) が不等式 $y > x + 1$ の表す領域に入るかどうかは、 $x = a$, $y = b$ を代入して $b > a + 1$ が成り立つかを調べればよい。

したがって、不等式が表す領域とは、その不等式を成り立たせる座標をもつ点をすべて集めたものである。

境界

不等式の不等号を等号に変えた方程式が、領域の境界を与える。

たとえば、 $y > x + 1$ と $y \geq x + 1$ は、どちらも境界が直線 $y = x + 1$ である。

ただし、 $>$ や $<$ では境界を含まず、 $\geq$ や $\leq$ では境界を含む。この違いは領域図では破線と実線の違いとして表れる。

同じ境界でも、含むかどうか異なる

まず $y > x + 1$ を考える。境界は $y = x + 1$ である。

境界上にない点として原点 $(0, 0)$ を代入すると、 $0 > 1$ は成り立たない。したがって、原点がある側ではなく、その反対側が領域である。これは直線 $y = x + 1$ の上側である。

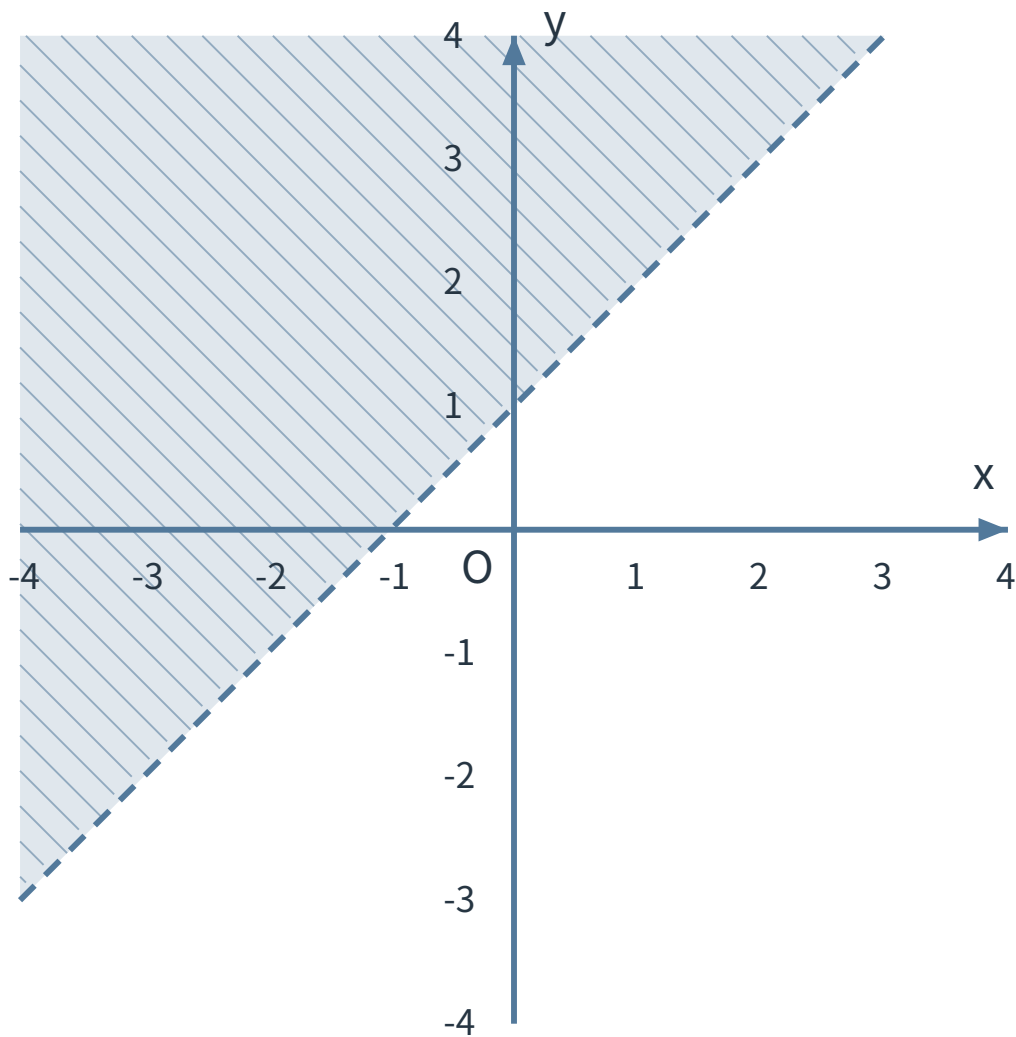


図1 $y > x + 1$ の領域 (境界 $y = x + 1$ は破線)

一方、 $y \geq x + 1$ でも境界は同じ直線 $y = x + 1$ である。原点を代入すると $0 \geq 1$ は成り立たないため、塗る側も同じ上側である。
異なるのは境界上の点である。 $y = x + 1$ を満たす点では等号が成り立つため、 $\geq$ では境界を領域に含む。

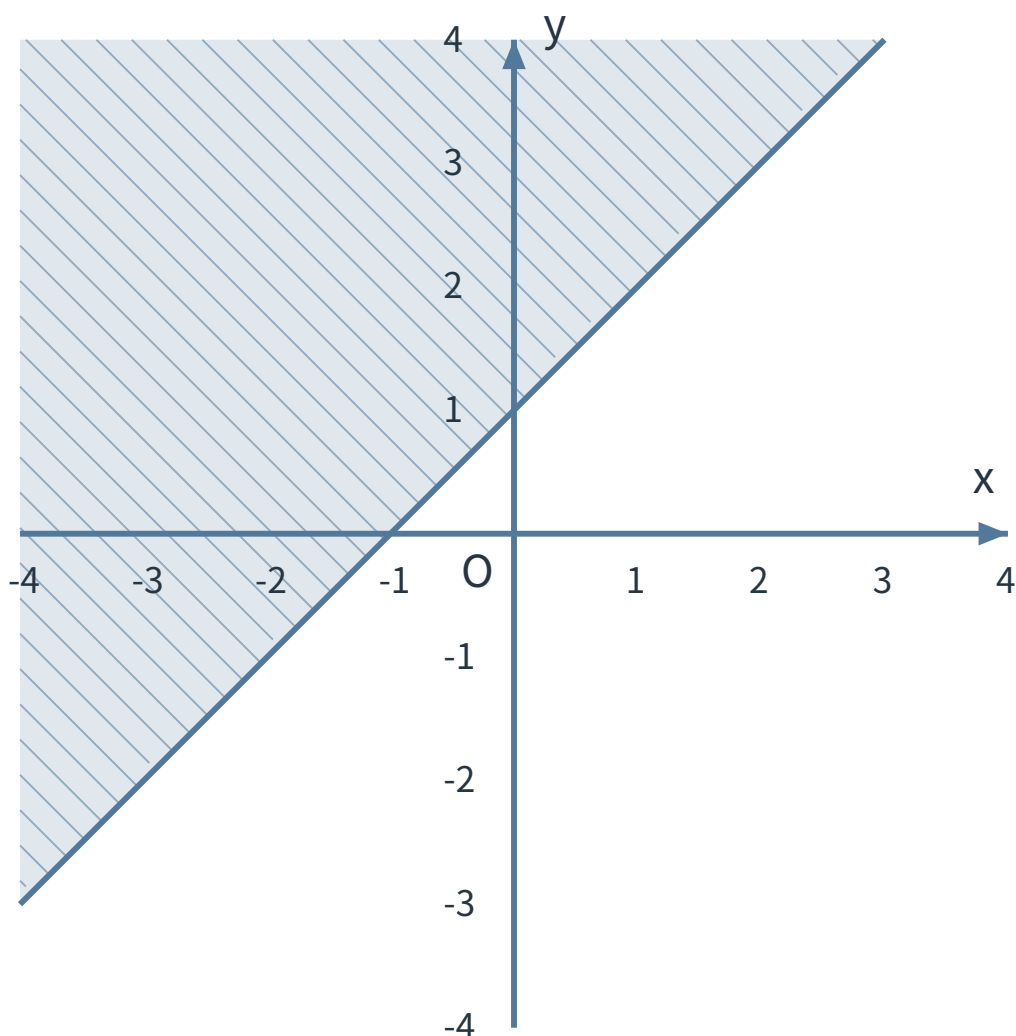


図2 $y \geq x + 1$ の領域 (境界 $y = x + 1$ は実線)

直線を境界とする領域の判断

直線を境界とする不等式では、次の3点を確認する。

1. 不等号を等号に変えて境界線を求める。
 2. $>$ 、 $<$ なら境界を含まず、 $\geq$ 、 $\leq$ なら境界を含む。
 3. 境界上にないテスト点を1つ代入し、その点がある側を塗るか、反対側を塗るかを決める。
- 原点 $(0, 0)$ が境界上になければ、計算が簡単なのでテスト点として使いやすい。

テスト点は境界上から選ばない

テスト点が境界上にあると、境界のどちら側を選ぶべきか判定できない。

たとえば境界が $y = x$ のとき、原点 $(0, 0)$ は境界上にある。この場合は $(0, 1)$ など、境界上にない点を選ぶ必要がある。

円を境界とする領域

$x^2 + y^2$ は、点 (x, y) と原点との距離の 2 乗を表す。

したがって、 $x^2 + y^2 \leq 9$ は原点からの距離が 3 以下である点を表す。境界は円 $x^2 + y^2 = 9$ であり、中心は原点、半径は 3 である。

$\leq$ なので円周を含み、領域は円の内側である。

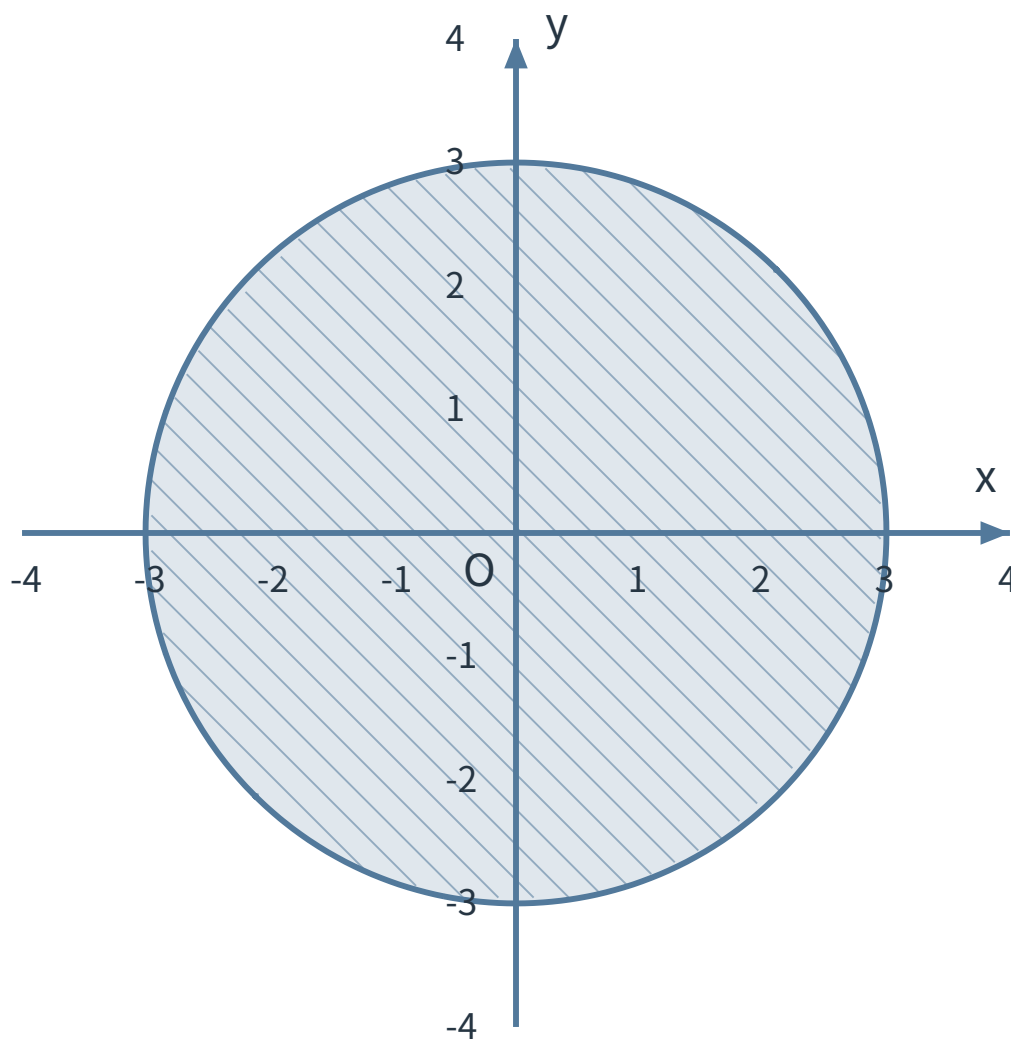


図3 $x^2 + y^2 \leq 9$ の領域（半径 3 の円の内部で、円周を含む）

これに対して、 $x^2 + y^2 > 9$ は原点からの距離が 3 より大きい点を表す。境界は同じ円 $x^2 + y^2 = 9$ であるが、 $>$ なので円周を含まない。

したがって、領域は円の外部である。

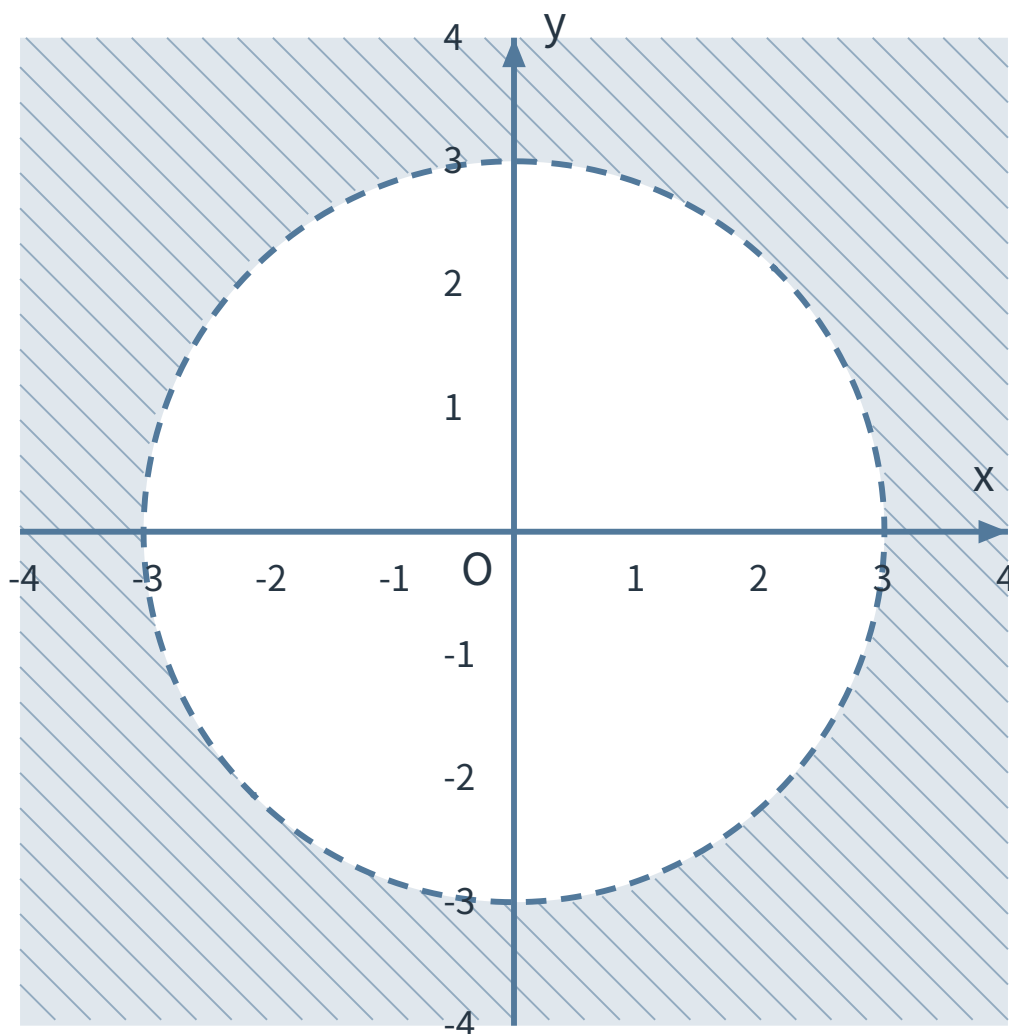


図4 $x^2 + y^2 > 9$ の領域（半径3の円の外側で、円周を含まない）

円を境界とする不等式の見方

原点を中心とする半径 r の円では、境界は $x^2 + y^2 = r^2$ である。

- $x^2 + y^2 < r^2$ は円の内側で、円周を含まない。
- $x^2 + y^2 \leq r^2$ は円の内側で、円周を含む。
- $x^2 + y^2 > r^2$ は円の外側で、円周を含まない。
- $x^2 + y^2 \geq r^2$ は円の外側で、円周を含む。

不等号の向きが内側か外側かを決め、等号を含むかどうかは円周を含むかどうかを決めるのである。

例題

例題 1

不等式 $y \leq -2x + 2$ が表す領域について、境界線、境界を含むかどうか、塗る側を答えよ。また、テスト点として原点 $(0, 0)$ を用いて確認せよ。

例題 1 の解答・解説

不等号を等号に変えると、境界線は $y = -2x + 2$ である。

不等号が $\leq$ なので、境界線を含む。

原点 $(0, 0)$ を代入すると $0 \leq 2$ となり、これは成り立つ。したがって、原点を含む側が領域である。

$x = 0$ のとき境界線上の点は $(0, 2)$ なので、原点は境界線より下側にある。よって、直線 $y = -2x + 2$ の下側を境界線ごと含む領域である。

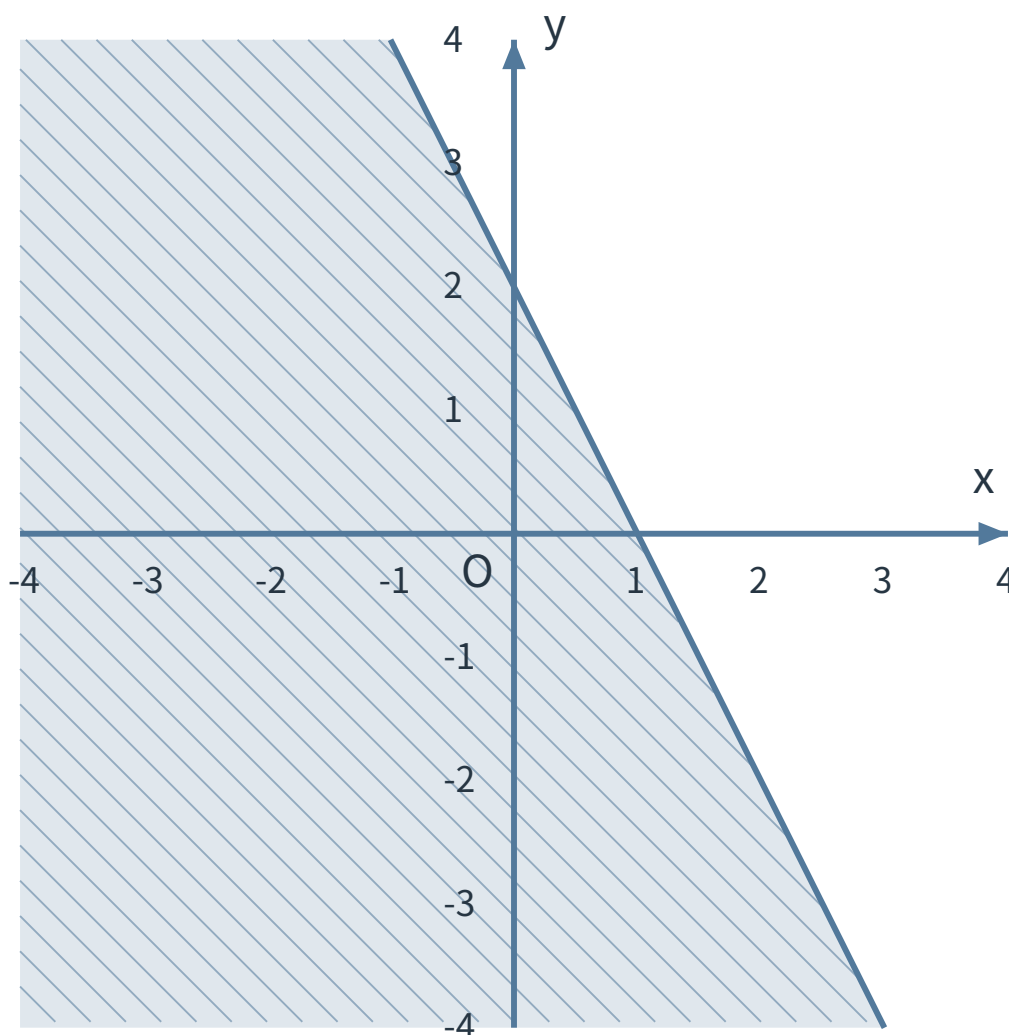


図 5 $y \leq -2x + 2$ の領域（境界を含み、原点側を塗る）

例題 2

不等式 $x^2 + y^2 > 4$ が表す領域について、境界、円の中心と半径、円周を含むかどうか、塗る部分を答えよ。

例題 2 の解答・解説

境界は $x^2 + y^2 = 4$ である。この円の中心は原点、半径は 2 である。

不等式は $x^2 + y^2 > 4$ なので、原点からの距離が 2 より大きい点を集めることになる。したがって、円の外側が領域である。

また、不等号が $>$ なので円周は含まない。

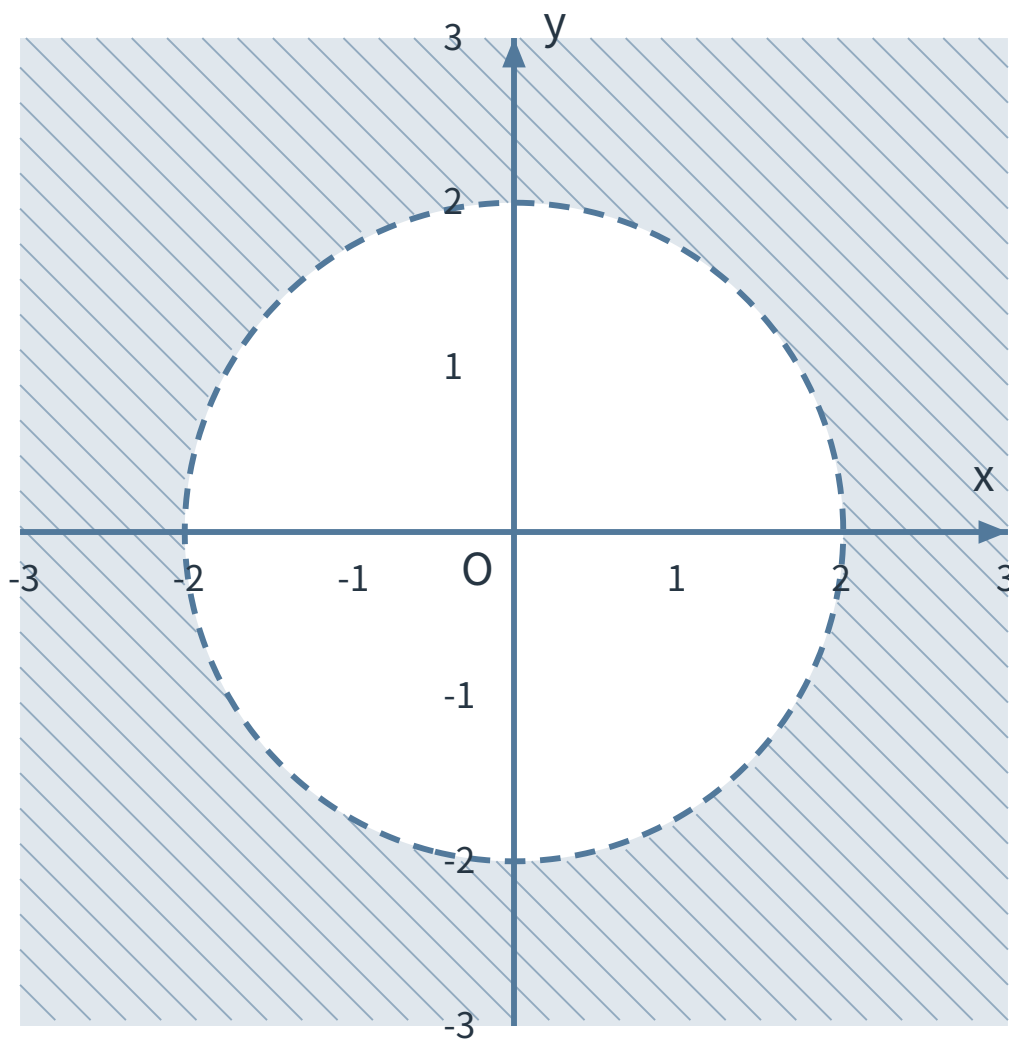


図 6 $x^2 + y^2 > 4$ の領域（半径 2 の円の外側で、円周を含まない）

例題 3

中心が原点、半径が 2 の円について、円の内側と円周を合わせた領域を表す不等式を求めよ。

例題 3 の解答・解説

中心が原点、半径が 2 の円の方程式は $x^2 + y^2 = 4$ である。
円の内側では原点からの距離が 2 以下であり、さらに円周も含むため等号を含める。
したがって、求める不等式は $x^2 + y^2 \leq 4$ である。

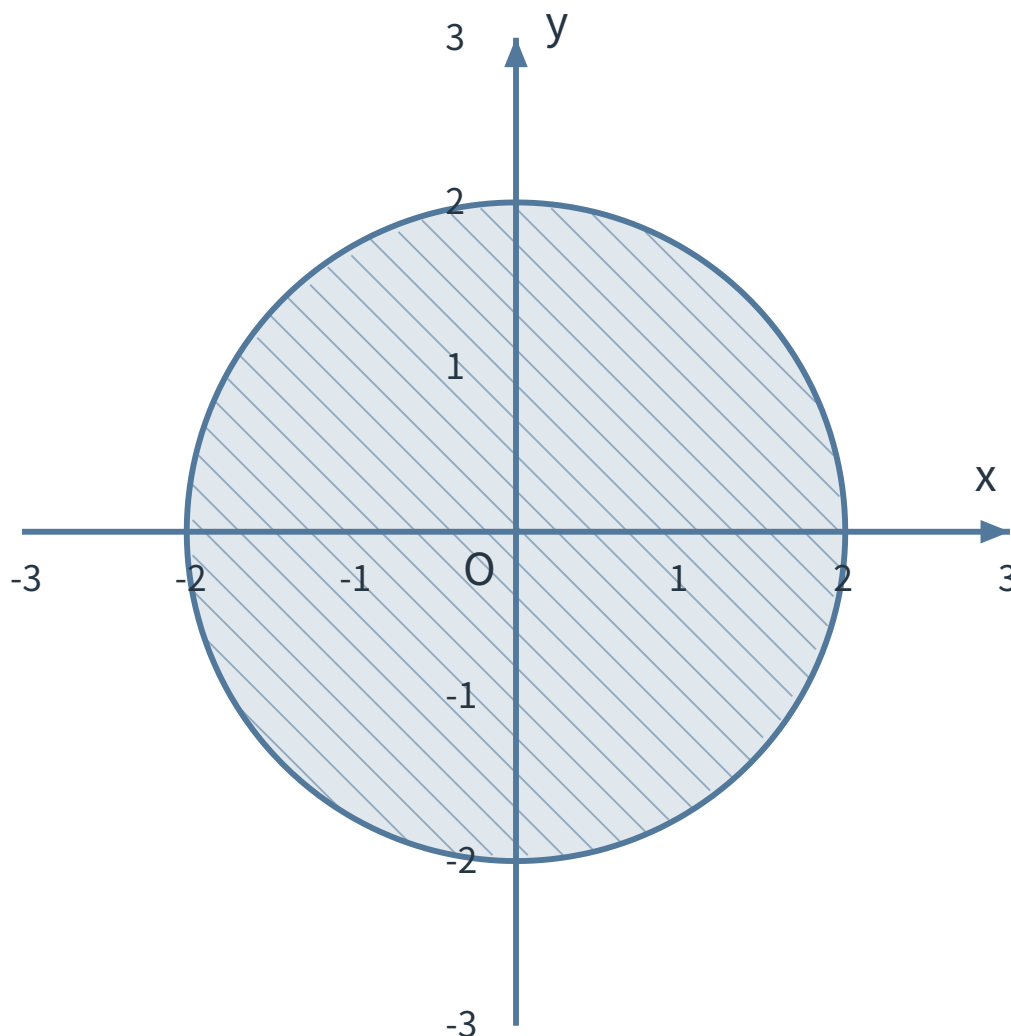


図 7 $x^2 + y^2 \leq 4$ の領域（半径 2 の円の内部で、円周を含む）

演習問題

演習問題 1

不等式 $y < -x + 2$ が表す領域について、境界線、境界を含むかどうか、塗る側を答えよ。テスト点には原点 $(0, 0)$ を用いよ。

演習問題 2

不等式 $y \geq 2x - 1$ が表す領域について、境界線、境界を含むかどうか、塗る側を答えよ。テスト点には原点 $(0, 0)$ を用いよ。

演習問題 3

直線 $y = -x + 3$ より上側で、境界線を含まない領域を表す不等式を求めよ。

演習問題 4

不等式 $x^2 + y^2 < 16$ が表す領域について、境界となる円の中心と半径、円周を含むかどうか、領域が円の内側か外側かを答えよ。

演習問題 5

不等式 $x^2 + y^2 \geq 25$ が表す領域について、境界となる円の中心と半径、円周を含むかどうか、領域が円の内側か外側かを答えよ。

演習問題 6

不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ について、点 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(4, 0)$ のうち、この不等式が表す領域に含まれる点をすべて答えよ。また、境界上にある点も答えよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

境界線は $y = -x + 2$ である。

不等号が $<$ なので、境界線は含まない。

原点を代入すると $0 < 2$ となり、これは成り立つ。したがって、原点を含む側が領域である。

$x = 0$ のとき境界線上の点は $(0, 2)$ なので、原点は境界線より下側にある。よって、直線 $y = -x + 2$ の下側が領域であり、境界線は含まない。

演習問題 2 の解答・解説

境界線は $y = 2x - 1$ である。

不等号が $\geq$ なので、境界線を含む。

原点を代入すると $0 \geq -1$ となり、これは成り立つ。したがって、原点を含む側が領域である。

$x = 0$ のとき境界線上の点は $(0, -1)$ なので、原点は境界線より上側にある。よって、直線 $y = 2x - 1$ の上側を境界線ごと含む領域である。

演習問題 3 の解答・解説

境界線は $y = -x + 3$ である。

「上側」であるから、 y は境界線上の値 $-x + 3$ より大きい。また、境界線を含まないのので等号は付けない。

したがって、求める不等式は $y > -x + 3$ である。

演習問題 4 の解答・解説

境界は $x^2 + y^2 = 16$ である。 $16 = 4^2$ なので、中心は原点、半径は 4 である。

不等号が $<$ なので円周は含まない。

また、 $x^2 + y^2 < 16$ は原点からの距離が 4 より小さいことを表す。したがって、領域は円の内側である。

演習問題 5 の解答・解説

境界は $x^2 + y^2 = 25$ である。 $25 = 5^2$ なので、中心は原点、半径は 5 である。

不等号が $\geq$ なので円周を含む。

また、 $x^2 + y^2 \geq 25$ は原点からの距離が 5 以上であることを表す。したがって、領域は円の外側と円周を合わせた部分である。

演習問題 6 の解答・解説

各点の座標を $x^2 + y^2 \leq 9$ に代入して調べる。

点 $A(0,0)$ では $0^2 + 0^2 = 0$ であり、 $0 \leq 9$ なので領域に含まれる。

点 $B(3,0)$ では $3^2 + 0^2 = 9$ であり、 $9 \leq 9$ なので領域に含まれる。さらに等号が成り立つため、点 B は境界上にある。

点 $C(4,0)$ では $4^2 + 0^2 = 16$ であり、 $16 \leq 9$ は成り立たないので領域に含まれない。

したがって、領域に含まれる点は A と B であり、境界上にある点は B である。