

第 48 講 チェバの定理

学習目標

- ・ 三角形の 3 頂点から対辺へ引いた 3 本の線分が 1 点で交わる条件を説明できる。
- ・ チェバの定理の 3 つの比を、正しい向きで書ける。
- ・ 3 つの比の積が 1 になることを使って、未知の比や長さを求められる。
- ・ 与えられた辺の分け方から、3 本の線分が 1 点で交わるか判断できる。

3 本の線分が 1 点で交わる条件を調べる

三角形の各頂点から対辺へ線を引き

三角形 ABC について、点 D を辺 BC 上、点 E を辺 CA 上、点 F を辺 AB 上にとります。
そして、頂点と向かいの辺上の点を結んで、

- ・ AD
- ・ BE
- ・ CF

の 3 本を考えます。

この 3 本がある 1 点 P で交わる時、

AD, BE, CF は 1 点で交わる

または

AD, BE, CF は共点である

といいます。

配置は次のように整理します。

辺上の点	位置	その点へ向かう線分
D	辺 BC 上	頂点 A から引く AD
E	辺 CA 上	頂点 B から引く BE
F	辺 AB 上	頂点 C から引く CF

3 本の線分 AD, BE, CF が同じ点 P を通る配置を考えます。

チェバの定理は、この 3 本が 1 点で交わることと、3 辺上にできる比との関係を表す定理です。

チェバの定理

三角形 ABC で、点 D, E, F がそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあるとします。

このとき、 AD, BE, CF が 1 点で交わるための条件は、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

逆に、この積が 1 なら、 AD, BE, CF は 1 点で交わります。

チェバの定理の基本形

配置を

- ・ D は BC 上
- ・ E は CA 上

- F は AB 上
としたとき、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

を使います。

3つの比を正しい向きで並べることが最も大切です。

比の向きをそろえる

B から C、C から A、A から B と一周する

チェバの定理では、比をばらばらに覚えると向きを取り違いやすくなります。

そこで、三角形の辺を

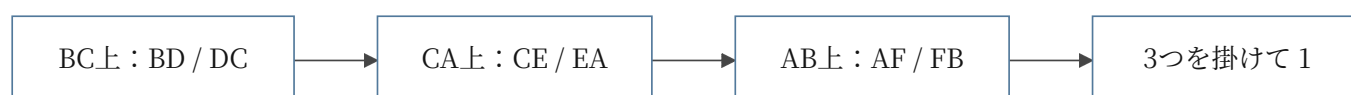
$B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$

と一周するように見ます。

すると、

- 辺 BC では $B \rightarrow D \rightarrow C$ なので $\frac{BD}{DC}$
- 辺 CA では $C \rightarrow E \rightarrow A$ なので $\frac{CE}{EA}$
- 辺 AB では $A \rightarrow F \rightarrow B$ なので $\frac{AF}{FB}$

となります。



この「三角形を同じ向きに一周する」という見方を使うと、分子と分母の向きをそろえやすくなります。

比の向きを再現する手順

チェバの定理を書くときは、次の順にたどります。

1. B から C へ進み、 $\frac{BD}{DC}$ 。
2. C から A へ進み、 $\frac{CE}{EA}$ 。
3. A から B へ進み、 $\frac{AF}{FB}$ 。
4. 3つを掛けて 1 とする。

向きを途中で逆にしないことが重要です。

1つだけ逆向きにしない

たとえば、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{AF}{FB}$$

のように、真ん中だけ逆向きにするとチェバの定理の基本形にはなりません。

3つの比は同じ向きに三角形を一周するようにそろえます。

積が 1 なら何が分かるか

1 点で交わることと積が 1 になることが対応する

たとえば、

$$\frac{BD}{DC} = 2, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{3}{4}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$$

とします。

3 つを掛けると、

$$2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

です。

したがって、チェバの定理より AD, BE, CF は 1 点で交わります。

反対に、3 本が 1 点で交わるのが分かっているならば、3 つの比の積は必ず 1 になります。

チェバの定理の 2 つの使い方

チェバの定理には、主に 2 つの使い方があります。

3 本が 1 点で交わるのが分かっている場合

積を 1 として、未知の比や長さを求めます。

辺を分ける比が分かっている場合

3 つの比の積を計算し、1 になれば 3 本は 1 点で交わると判断します。

なぜ積が 1 になるのか

面積の比が一周して打ち消し合う

AD, BE, CF が 1 点 P で交わっているとします。

三角形の面積を利用すると、辺上の比を P を含む小さな三角形の面積比に置き換えることができます。

その結果、3 つの比は順に面積比としてつながり、全部掛けると同じ面積が分子と分母に 1 回ずつ現れます。

そのため、すべてが打ち消し合い、積が 1 になります。

L01 では、まず

3 本が 1 点で交わることと、3 つの辺の比の積が 1 になることが対応するという構造を使えるようにすることが大切です。

未知の比を求める

分からない比を 1 つだけ残す

AD, BE, CF が 1 点で交わり、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{3}{5}$$

とします。

$\frac{AF}{FB} = x$ とおくと、チェバの定理より、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot x = 1$$

です。

左辺の分数を整理すると、

$$\frac{2}{5}x = 1$$

なので、

$$x = \frac{5}{2}$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 5 : 2$$

となります。

未知の比を求める手順

1. 点 D, E, F がどの辺上にあるか確認する。
2. $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ と書く。
3. 分かっている比を代入する。
4. 分からない比だけを残して解く。
5. 必要なら分数を整数比に直す。

長さから比を作る

まず線分の比へ直す

チェバの定理では、辺上の線分の長さそのものではなく、その比を使います。

たとえば、

$$BD = 4, \quad DC = 6$$

なら、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

同じように、

$$CE = 9, \quad EA = 3$$

なら、

$$\frac{CE}{EA} = 3$$

です。

問題で長さが与えられているときは、チェバの式へ入れる前に対応する比を作ると整理しやすくなります。

この講では辺上の点を扱う

この講では、 D, E, F がそれぞれ三角形の辺 BC, CA, AB 上にある基本的な場合を扱います。辺を延長した場合の扱いや、次講のメネラウスの定理には進みません。

既習事項と組み合わせる

角の二等分線から比が分かることもある

前講までに学んだ角の二等分線の定理から、辺上の比が分かる場合があります。たとえば、 AD が $\angle A$ の二等分線なら、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

です。

このように、別の条件から $\frac{BD}{DC}$ などをも求め、そのあとチェバの定理を使うこともできます。ただし、この講の中心は、得られた3つの比を正しい向きで掛け、積が1になる条件を使うことです。

例題

例題 1

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は1点で交わっています。

$$BD : DC = 2 : 3$$

$$CE : EA = 3 : 4$$

のとき、 $AF : FB$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

チェバの定理より、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

$\frac{AF}{FB} = x$ とすると、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{1}{2}x = 1$$

より $x = 2$ です。

よって、

$$AF : FB = 2 : 1$$

です。

例題 2

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあります。

$$BD = 3, \quad DC = 6$$

$$CE = 4, \quad EA = 2$$

$$AF = 5, \quad FB = 5$$

のとき、 AD, BE, CF は 1 点で交わるか答えなさい。

例題 2 の解答・解説

3 つの比を求めると、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CE}{EA} = 2$$

$$\frac{AF}{FB} = 1$$

です。

積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

となります。

したがって、チェバの定理より AD, BE, CF は 1 点で交わります。

例題 3

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

AD は $\angle A$ の二等分線で、

$$AB : AC = 3 : 2$$

です。

また、

$$CE : EA = 4 : 3$$

です。

$AF : FB$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

AD は $\angle A$ の二等分線なので、角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 2$$

です。

チェバの定理より、

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

$\frac{AF}{FB} = x$ とすると、

$$2x = 1$$

なので、

$$x = \frac{1}{2}$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 1 : 2$$

です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

$$BD : DC = 1 : 2$$

$$CE : EA = 4 : 3$$

のとき、 $AF : FB$ を求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

$$BD : DC = 3 : 5$$

$$AF : FB = 2 : 3$$

のとき、 $CE : EA$ を求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあります。

$$BD : DC = 2 : 3$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

$$AF : FB = 1 : 1$$

のとき、 AD, BE, CF は 1 点で交わるか答えなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあります。

$$BD = 4, \quad DC = 8$$

$$CE = 6, \quad EA = 3$$

$$AF = 7, \quad FB = 7$$

のとき、 AD, BE, CF は 1 点で交わるか答えなさい。

練習問題 5

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

$$BD = 6, \quad DC = 9$$

$$CE = 8, \quad EA = 4$$

$$FB = 10$$

のとき、 AF を求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

$$BD : DC = 5 : 4$$

$$CE : EA = 2 : 5$$

$$AF = 8$$

のとき、 FB を求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあります。
ある生徒はチェバの定理を書くとき、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EA}{CE} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

としました。

比の向きに注目して、この式の問題点を説明し、基本形を正しく書きなさい。

練習問題 8

三角形 ABC で、 D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上にあります。

$$BD : DC = 2 : 1$$

$$CE : EA = 1 : 4$$

です。

AD, BE, CF が 1 点で交わるためには、 $AF : FB$ はいくつであればよいですか。

練習問題 9

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線で、 D は辺 BC 上にあります。

また、 E, F はそれぞれ辺 CA, AB 上にあり、 AD, BE, CF は 1 点で交わっています。

$$AB = 8, \quad AC = 12$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

のとき、 $AF : FB$ を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

チェバの定理より、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

$\frac{AF}{FB} = x$ とすると、

$$\frac{2}{3}x = 1$$

なので、

$$x = \frac{3}{2}$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 3 : 2$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

チェバの定理より、

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

です。

$\frac{CE}{EA} = x$ とすると、

$$\frac{2}{5}x = 1$$

です。

したがって、

$$x = \frac{5}{2}$$

なので、

$$CE : EA = 5 : 2$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

3つの比の積は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 1$$

です。

したがって、チェバの定理より AD, BE, CF は 1 点で交わります。

練習問題 4 の解答・解説

各比は、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CE}{EA} = 2$$

$$\frac{AF}{FB} = 1$$

です。

積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

です。

したがって、 AD, BE, CF は 1 点で交わります。

練習問題 5 の解答・解説

各比を整理すると、

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CE}{EA} = 2$$

です。

チェバの定理より、

$$\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{AF}{10} = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{AF}{10} = 1$$

なので、

$$AF = \frac{15}{2}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

チェバの定理より、

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{FB} = 1$$

です。

最初の 2 つの積は $\frac{1}{2}$ なので、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{FB} = 1$$

です。

したがって、

$$\frac{4}{FB} = 1$$

より、

$$FB = 4$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

三角形を $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$ と一周する向きで比をそろえます。

辺 BC では $\frac{BD}{DC}$ 、辺 CA では $\frac{CE}{EA}$ 、辺 AB では $\frac{AF}{FB}$ です。

元の式では、真ん中の比だけが逆向きになっています。

正しい基本形は、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

チェバの定理より、

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

$\frac{AF}{FB} = x$ とすると、

$$\frac{1}{2}x = 1$$

なので、

$$x = 2$$

です。

したがって、

$$AF : FB = 2 : 1$$

であれば、3 本は 1 点で交わります。

練習問題 9 の解答・解説

AD は $\angle A$ の二等分線なので、角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = AB : AC = 8 : 12 = 2 : 3$$

です。

チェバの定理より、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

です。

最初の 2 つの積は 1 なので、

$$\frac{AF}{FB} = 1$$

となります。

したがって、

$$AF : FB = 1 : 1$$

です。