

第 108 講 周期とグラフの変形

学習目標

この講では、三角関数のグラフが式の変化によってどのように変わるかを理解する。

- ・ 正弦・余弦・正接の周期を求めることができる。
- ・ $y = \sin(bx)$ 、 $y = \cos(bx)$ 、 $y = \tan(bx)$ の周期を、係数 b に注目して判断できる。
- ・ 縦方向の変化、横方向の変化、左右移動を区別してグラフの変化を説明できる。
- ・ 式の内側の変化が横方向、外側の変化が縦方向に影響することを利用して、三角関数の変形を考えられる。

周期を見る基本の考え方

関数 $f(x)$ の周期とは、正の数 T について $f(x+T) = f(x)$ が定義域内のすべての x で成立し、さらに定義される場所も同じ間隔で繰り返すときの繰返し幅である。

このような T のうち、最小の正のものをこの講では周期と呼ぶ。

ラジアンを用いると、正弦関数と余弦関数の基本周期は 2π である。つまり、 $\sin(x+2\pi) = \sin x$ 、 $\cos(x+2\pi) = \cos x$ が成り立つ。

正接関数の基本周期は π であり、 $\tan(x+\pi) = \tan x$ が成り立つ。

ただし、1 組の値が一致するだけでは周期とはいえない。例えば、 $f(a) = f(a+T)$ がある 1 つの a で成立しても、すべての x で同じ繰返しが起こるとは限らない。周期を判断するときは、グラフ全体が同じ形で繰り返すことを確認する必要がある。

周期を決める角の係数

$y = \sin(bx)$ や $y = \cos(bx)$ では、 x が T 進むと、内側の角 bx は bT 変化する。

この変化の大きさ $|b|T$ が、基本周期である 2π になる条件を考える。

$|b|T = 2\pi$ より、 $y = \sin(bx)$ 、 $y = \cos(bx)$ の周期は $\frac{2\pi}{|b|}$ である。

同様に、 $y = \tan(bx)$ では基本周期が π なので、 $|b|T = \pi$ より、周期は $\frac{\pi}{|b|}$ である。

ここで $b \neq 0$ とする。 $|b| > 1$ なら、同じ変化をより短い x の範囲で行うため横に縮む。 $0 < |b| < 1$ なら、変化がゆっくりになるため横に広がる。

$b < 0$ の場合は、内側の角が減少するためグラフが進む向きは逆になる。しかし、繰返し幅は $|b|$ で決まるため、周期を求めるときは絶対値を用いる。

$b = 0$ の場合、 $y = \sin 0$ 、 $y = \cos 0$ 、 $y = \tan 0$ は定数関数になる。定数関数は任意の正数が繰返し幅になるため、最小の正の周期を持たない。この場合は割算による周期の公式を使えない。

式の外側と内側の変形

三角関数のグラフを見るときは、式のどこが変化しているかを分けて考える。

式の外側の操作は縦座標の変化に対応する。例えば、 $y = 2\sin x$ では、すべての y の値が 2 倍になるため、グラフは縦に伸びる。

一方、式の内側の操作は横座標の対応を変える。例えば、 $y = \sin(2x)$ では、同じ変化を半分の x の範囲で行うため、横方向に縮む。

この区別を使うと、縦方向の倍率・上下移動、横方向の伸縮、左右移動を混同しにくくなる。

左右移動の考え方

$y = f(x-h)$ の形では、元のグラフ上の点 $(u, f(u))$ を考える。

$x-h = u$ より $x = u+h$ であるため、点は $(u+h, f(u))$ へ移る。

したがって、 $h > 0$ なら右へ h 、 $h < 0$ なら左へ $|h|$ 、 $h = 0$ なら移動なしとなる。

例えば、 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ は $y = \sin x$ を右へ $\frac{\pi}{2}$ 移動したグラフである。

また、 $y = \sin(2x - c)$ では、基準となるグラフは $y = \sin(2x)$ である。括弧内をくくると、 $2x - c = 2(x - \frac{c}{2})$ となるため、横方向の移動量は $\frac{c}{2}$ である。 c の符号によって移動する向きが決まる。

$y = \sin x$ から考える場合は、横方向の縮小と移動の2つの操作が含まれるため、移動量だけを見て判断しないことが重要である。

値域と縦方向の変化

正弦関数と余弦関数は、基本的に $-1 \leq \sin x \leq 1$ 、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ を満たす。

したがって、 $y = a \sin x + b$ や $y = a \cos x + b$ では、縦方向の倍率 a と上下移動 b によって値域が変化する。

a が負の場合は、上下反転が起こる。これは、正の値が負の値へ、負の値が正の値へ移るためである。

例題

例題 1

$y = \sin(2x)$ の周期を理由とともに求めなさい。また、 $0 \leq x \leq \pi$ の1周期について、代表点5個の座標を求めなさい。

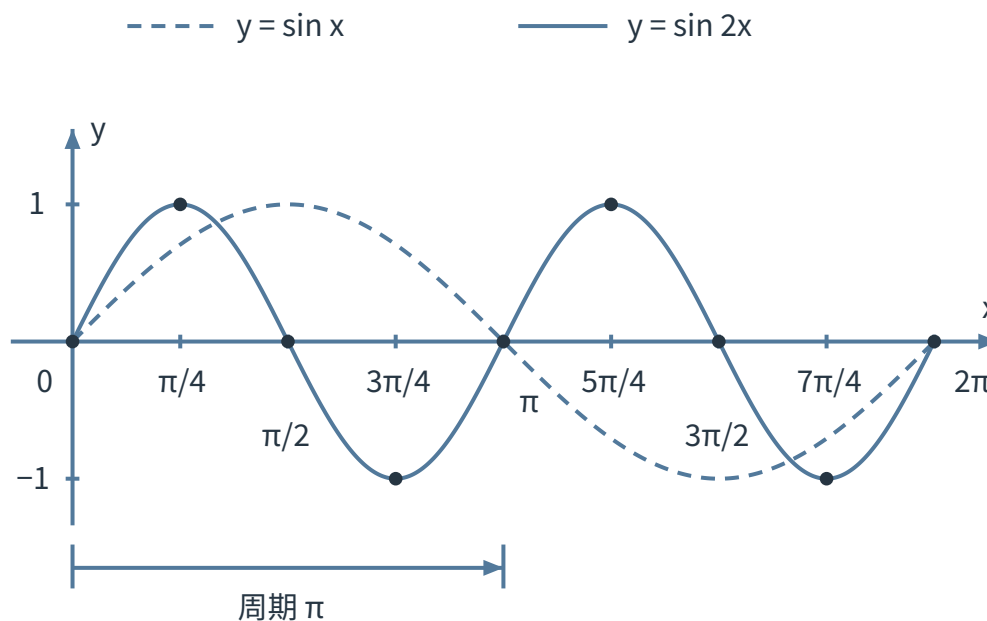


図 1 実線 $y = \sin(2x)$ と破線 $y = \sin x$ (角度はラジアン)

例題 1 の解答・解説

$y = \sin(2x)$ の周期を T とする。

x が T 進むと、内側の角 $2x$ は $2T$ 変化する。正弦関数の1周期分の変化は 2π なので、 $2T = 2\pi$ となる。
したがって、周期は π である。
代表点は、 x 、 $2x$ 、 $\sin(2x)$ の対応を考える。

x	$2x$	$\sin(2x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

したがって、代表点は $(0, 0)$ 、 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 、 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 、 $(\frac{3\pi}{4}, -1)$ 、 $(\pi, 0)$ である。

例題 2

$y = 2 \cos x + 1$ について、縦方向の変形を説明し、全実数上での値域を求めなさい。また、 $0 \leq x \leq 2\pi$ で最大値・最小値となるすべての x を求めなさい。

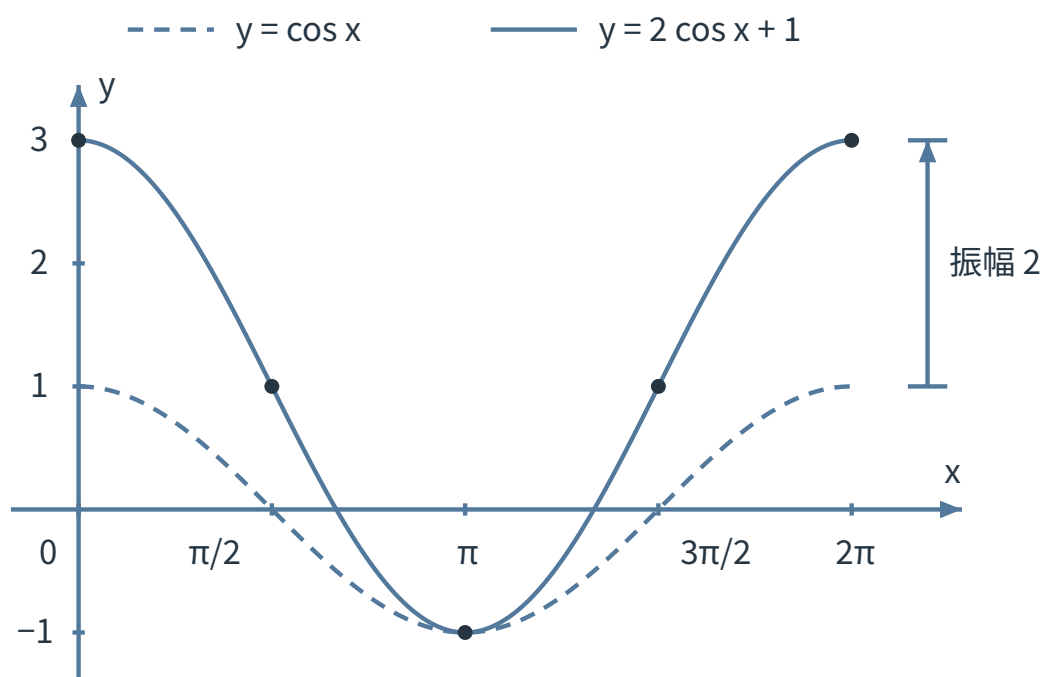


図 2 実線 $y = 2 \cos x + 1$ と破線 $y = \cos x$ (角度はラジアン)

例題 2 の解答・解説

基本の余弦関数 $y = \cos x$ に対して、外側の操作を見る。

係数 2 は縦方向の倍率であり、グラフは縦に 2 倍になる。その後、+1 によって全体が上へ 1 移動する。

$-1 \leq \cos x \leq 1$ より、 $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ である。

さらに 1 を加えると、 $-1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 3$ となる。

したがって、値域は $-1 \leq y \leq 3$ である。

最大値 3 になるのは、 $\cos x = 1$ のときである。 $0 \leq x \leq 2\pi$ では、 $x = 0, 2\pi$ である。

最小値 -1 になるのは、 $\cos x = -1$ のときである。

$x = \pi$ である。

したがって、最大値となる x は $x = 0, 2\pi$ 、最小値となる x は $x = \pi$ である。

例題 3

$y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ について、 $y = \sin x$ からどのように移動したグラフか説明しなさい。また、周期を答え、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ の 1 周期の代表点 5 個を求めなさい。

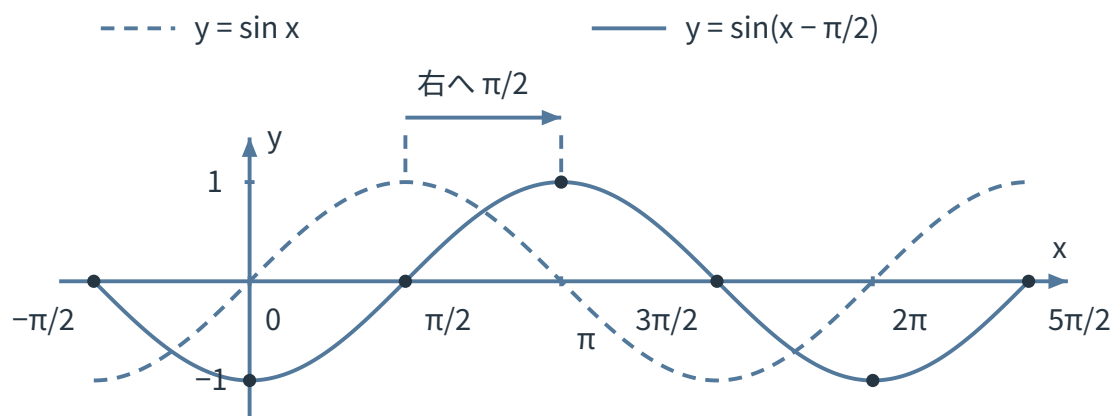


図 3 実線 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ と破線 $y = \sin x$ (角度はラジアン)

例題 3 の解答・解説

式の内側を見ると、 $x - \frac{\pi}{2}$ となっている。

$y = f(x - h)$ は右へ h 移動するため、このグラフは $y = \sin x$ を右へ $\frac{\pi}{2}$ 移動したものである。

また、角の係数は 1 なので、周期は基本周期と同じである。

したがって、周期は 2π である。

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ で 1 周期を見る。

基本の代表点 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ を右へ $\frac{\pi}{2}$ 移動すると、 $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$ となる。

対応する値は、 $0, 1, 0, -1, 0$ である。

したがって、代表点は $(\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, 1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, -1), (\frac{5\pi}{2}, 0)$ である。

演習問題

演習 1：周期の計算

$y = \cos(3x)$ の周期を求めなさい。

演習 2：正接の周期

$y = \tan(2x)$ の周期を求めなさい。また、この関数が定義されない x について、内側の角がどのような値になるか説明しなさい。

演習 3：負の縦係数と値域

$y = -3\sin x + 1$ の値域を求めなさい。また、負の係数によってグラフがどのように変化するか説明しなさい。

演習 4：左への移動

$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ は $y = \cos x$ をどちら向きにどれだけ移動したグラフか答えなさい。

演習 5：内側の係数をくくる移動幅

$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ について、基準グラフ $y = \sin(2x)$ からどちら向きにどれだけ移動したグラフか答えなさい。

演習 6：横方向の拡大

$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ の周期を求め、 $y = \sin x$ と比べた横方向の変化を説明しなさい。

演習 7：周期の判断の誤り

ある関数 $f(x)$ について、 $f(0) = f(\pi)$ であることが分かった。この情報だけから「周期は π である」と判断することはできない。その理由を説明しなさい。

演習 8：定数関数の例外

$y = 5$ の周期について説明しなさい。三角関数の周期の公式をそのまま使えない理由も答えなさい。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$y = \cos(bx)$ の周期は $\frac{2\pi}{|b|}$ である。

この問題では $b = 3$ なので、周期は $\frac{2\pi}{3}$ である。

係数 3 によって、基本周期 2π の変化を 3 倍速く行うため、繰返し幅は 3 分の 1 になる。

演習 2 の解答・解説

$y = \tan(bx)$ の周期は $\frac{\pi}{|b|}$ である。

ここでは $b = 2$ なので、周期は $\frac{\pi}{2}$ である。

また、正接関数は内側の角が $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) のとき定義されない。

したがって、 $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ となる x では、 $y = \tan(2x)$ は定義されない。

演習 3 の解答・解説

$y = -3\sin x + 1$ を考える。

まず、 $-1 \leq \sin x \leq 1$ である。

この不等式の各辺を負の数 -3 で掛けるため、不等号の向きが逆になる。

$3 \geq -3\sin x \geq -3$ これを小さい順に並べ直すと、 $-3 \leq -3\sin x \leq 3$ となる。

さらに 1 を加えると、 $-2 \leq -3\sin x + 1 \leq 4$ である。

したがって、値域は $-2 \leq y \leq 4$ である。

グラフは、係数 -3 によって x 軸に関して反転し、縦方向に 3 倍になる。その後、 $+1$ によって上へ 1 移動する。

したがって、「反転するだけ」ではなく、反転・縦方向の拡大・上下移動の 3 つの変化が起こる。

演習 4 の解答・解説

$y = f(x - h)$ は右へ h 移動する形である。

この式は、 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ であり、 $x + \frac{\pi}{3} = x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ と考えられる。

したがって、 $h = -\frac{\pi}{3}$ である。

よって、 $y = \cos x$ を左へ $\frac{\pi}{3}$ 移動したグラフである。

演習 5 の解答・解説

括弧内をくくる。

$2x - \frac{\pi}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ となる。

したがって、 $y = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ であり、基準グラフ $y = \sin(2x)$ を右へ $\frac{\pi}{4}$ 移動したグラフである。

移動量は係数 2 を考えて求める必要があり、 $\frac{\pi}{2}$ ではなく $\frac{\pi}{4}$ となる。

演習 6 の解答・解説

$y = \sin(bx)$ の周期は $\frac{2\pi}{|b|}$ である。

ここでは、 $b = \frac{1}{2}$ なので、周期は $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ である。

$y = \sin x$ の周期は 2π であるため、横方向に 2 倍広がったグラフになる。

演習 7 の解答・解説

$f(x) = \sin x$ を考える。

$\sin 0 = 0$ 、 $\sin \pi = 0$ なので、 $f(0) = f(\pi)$ は成り立つ。

しかし、 $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ であり、 $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ である。

もし π が周期なら、すべての x について $f(x + \pi) = f(x)$ が成り立つ必要がある。しかし、 $f(\frac{\pi}{2} + \pi) = f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ であり、 $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ とは異なる。

したがって、1 組の値の一致だけでは周期とは判断できない。

演習 8 の解答・解説

$y = 5$ は常に同じ値をとる定数関数である。

任意の正の数 T について、 $5 = 5$ であるため、 $y(x + T) = y(x)$ が成り立つ。

しかし、最小の正の周期を選ぶことはできない。

したがって、定数関数は三角関数で使う一般的な周期の公式の例外であり、最小の正の周期を持たない。