

第 35 講 判別式と共有点の個数

学習目標

- 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ を計算できる。
- D の符号から二次方程式の実数解の個数を判断できる。
- 実数解の個数と、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数を対応させられる。
- 判別式を使って、共有点の個数だけを効率よく判断できる。

解を求めなくても個数だけ分かる

共有点の個数と実数解の個数

前講では、二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の実数解が、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の x 座標に対応することを学びました。したがって、二次方程式の実数解が 2 個なら共有点も 2 個、実数解が 1 個なら共有点も 1 個です。ここで、二次方程式を最後まで解かなくても、実数解が何個あるかだけを判断できる量があります。それが判別式です。

判別式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ただし $a \neq 0$ とします。この方程式の判別式を、

$$D = b^2 - 4ac$$

と定めます。

$a \cdot b \cdot c$ は符号も含めて読む

たとえば $2x^2 - 3x - 5 = 0$ では、

- $a = 2$
- $b = -3$
- $c = -5$

です。

特に、負の係数を正の数として扱わないように注意します。

$D > 0$ なら実数解は 2 個

平方根の中が正の場合

二次方程式の解の公式には $\sqrt{b^2 - 4ac}$ が現れます。判別式 $D = b^2 - 4ac$ が正なら、 $\sqrt{D}$ は正の実数です。そのため、異なる 2 つの実数解が得られます。グラフで見ると、放物線は x 軸と異なる 2 点で交わります。

$D > 0$ の場合

$D > 0$ なら、

- 二次方程式の異なる実数解は 2 個
- 放物線と x 軸の共有点は 2 個

です。

 $D=0$ なら実数解は 1 個**2 つの解が同じになる場合**

$D = 0$ なら、解の公式に現れる $\sqrt{D}$ は 0 です。

このとき、2 つに分かれていた解が同じ値になります。

したがって、異なる実数解は 1 個です。

グラフでは、放物線が x 軸にちょうど接する形になります。

 $D = 0$ の場合

$D = 0$ なら、

- 異なる実数解は 1 個
- 放物線と x 軸の共有点は 1 個

です。

 $D < 0$ なら実数解は 0 個**実数の範囲で平方根を作れない場合**

$D < 0$ なら、 $\sqrt{D}$ は実数として考えることができません。

したがって、二次方程式は実数解をもちません。

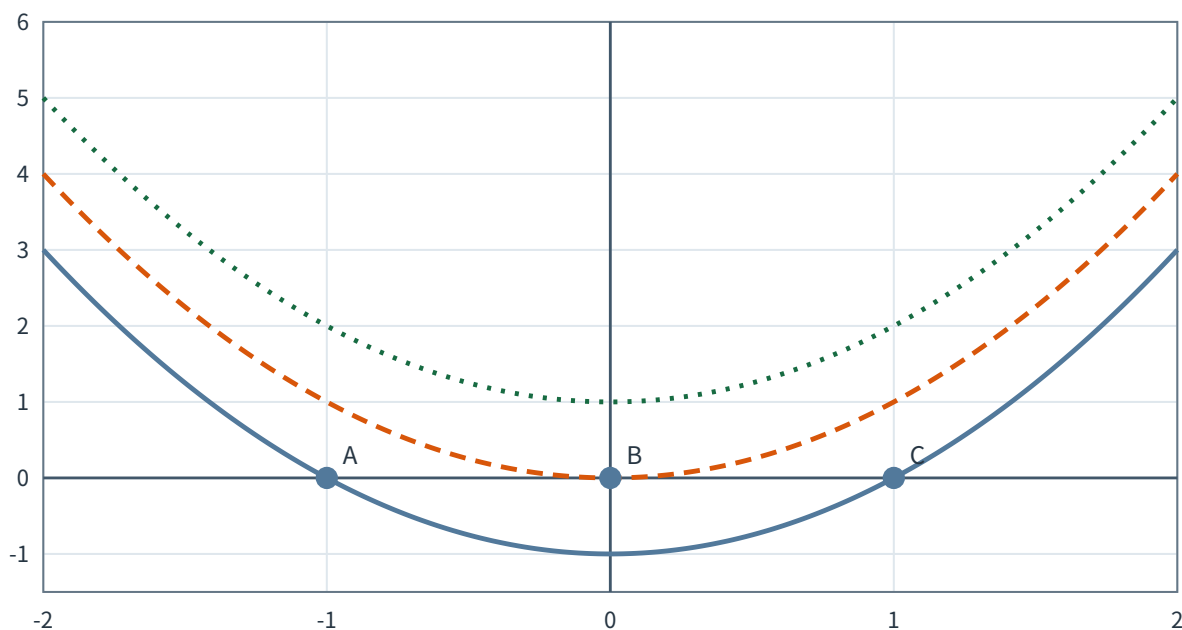
グラフでは、放物線と x 軸は交わりません。

 $D < 0$ の場合

$D < 0$ なら、

- 実数解は 0 個
- 放物線と x 軸の共有点は 0 個

です。

図1 判別式の符号と x 軸との共有点の個数

3つのグラフを判別式で確かめる

$y = x^2 - 1$ では $a = 1, b = 0, c = -1$ なので、 $D = 4 > 0$ です。 x 軸との共有点は2個です。

$y = x^2$ では $a = 1, b = 0, c = 0$ なので、 $D = 0$ です。 x 軸との共有点は1個です。

$y = x^2 + 1$ では $a = 1, b = 0, c = 1$ なので、 $D = -4 < 0$ です。 x 軸との共有点はありません。

判別式の符号と、グラフ上で見える共有点の個数が対応しています。

3つの対応を整理する

判別式と共有点の個数

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ と放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について、

- $D > 0$: 異なる実数解2個、 x 軸との共有点2個
- $D = 0$: 異なる実数解1個、 x 軸との共有点1個
- $D < 0$: 実数解0個、 x 軸との共有点0個

となります。

Dの値そのものではなく符号を見る

共有点の個数を判断するときに必要なのは、 D が具体的にいくつかではなく、

- 正か
- 0か
- 負か

という符号です。

たとえば $D = 25$ でも $D = 1$ でも、どちらも $D > 0$ なので共有点は2個です。

判別式を計算する手順

係数を確認してから代入する

二次方程式

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

では、 $a = 2, b = 3, c = -2$ です。

判別式は、

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$$

です。

$D > 0$ なので、異なる実数解は 2 個です。

したがって、放物線 $y = 2x^2 + 3x - 2$ と x 軸の共有点も 2 個あります。

判別式で個数を調べる手順

1. a, b, c を符号も含めて確認する。
2. $D = b^2 - 4ac$ を計算する。
3. $D > 0$ 、 $D = 0$ 、 $D < 0$ のどれかを判断する。
4. 実数解または共有点の個数へ読み替える。

2 つのグラフでも判別式を使える

まず 1 つの二次方程式にする

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の共有点の個数を考えます。

共有点では 2 つの y の値が等しいので、

$$x^2 = 2x + 3$$

です。

整理すると、

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

となります。

この二次方程式について D を調べれば、共有点の個数を判断できます。

$a = 1, b = -2, c = -3$ なので、 $D = 16 > 0$ です。

したがって、2 つのグラフの共有点は 2 個あります。

2 つのグラフの共有点の個数

2 つのグラフの共有点の個数を判別式で調べるときは、

1. 2 つの式を等しくする。
2. 一方の辺を 0 にして二次方程式を作る。
3. 判別式 D を計算する。
4. D の符号から共有点の個数を判断する。

という順に進めます。

この講では個数を判断する

判別式を使えば、実際の共有点の座標を求めなくても個数を判断できます。

この講では、判別式と共有点の個数の対応を扱います。二次式の正負から不等式を解く方法は次講で扱います。

例題**例題 1**

二次方程式

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

の実数解の個数を、判別式を使って求めなさい。また、放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ と x 軸の共有点の個数を答えなさい。

例題 1 の解答・解説

$a = 1, b = -6, c = 5$ です。

判別式は $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$ です。

$D > 0$ なので、異なる実数解は 2 個です。

したがって、放物線と x 軸の共有点も 2 個です。

例題 2

二次方程式

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

の実数解の個数を、判別式を使って求めなさい。

例題 2 の解答・解説

$a = 2, b = 4, c = 2$ です。

判別式は $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$ です。

したがって、異なる実数解は 1 個です。

対応する放物線と x 軸の共有点も 1 個です。

例題 3

放物線 $y = x^2 + 2x + 5$ と x 軸の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。

例題 3 の解答・解説

x 軸との共有点では、

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

です。

$a = 1, b = 2, c = 5$ なので、判別式は $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$ です。

$D < 0$ なので実数解はありません。

したがって、放物線と x 軸の共有点は 0 個です。

例題 4

放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ と直線 $y = x + 1$ の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。

例題 4 の解答・解説

共有点では、

$$x^2 - 2x + 3 = x + 1$$

です。

整理すると $x^2 - 3x + 2 = 0$ です。

$a = 1, b = -3, c = 2$ なので、 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ です。

$D > 0$ なので、共有点は 2 個です。

演習問題

練習問題 1

二次方程式

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

の実数解の個数を、判別式を使って求めなさい。

練習問題 2

二次方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

の実数解の個数を、判別式を使って求めなさい。

練習問題 3

二次方程式

$$2x^2 + x + 3 = 0$$

の実数解の個数を、判別式を使って求めなさい。

練習問題 4

放物線

$$y = 3x^2 - 5x - 2$$

と x 軸の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。**練習問題 5**

放物線

$$y = -x^2 + 6x - 9$$

と x 軸の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。**練習問題 6**

放物線

$$y = 2x^2 - 4x + 5$$

と x 軸の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。**練習問題 7**放物線 $y = x^2 + x$ と直線 $y = 3x + 3$ の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。**練習問題 8**放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ と直線 $y = -2$ の共有点の個数を、判別式を使って求めなさい。**練習問題 9**

ある生徒は、二次方程式

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

について、 $D = -16$ と求めた後、「判別式が負なので解は -16 である」と答えました。
この答えの誤りを説明し、実数解の個数を正しく答えなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

 $a = 1, b = 5, c = 4$ です。 $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$ なので、 $D > 0$ です。

したがって、異なる実数解は 2 個です。

練習問題 2 の解答・解説

$a = 1, b = -4, c = 4$ です。

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ です。

したがって、異なる実数解は 1 個です。

練習問題 3 の解答・解説

$a = 2, b = 1, c = 3$ です。

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$ なので、 $D < 0$ です。

したがって、実数解は 0 個です。

練習問題 4 の解答・解説

$a = 3, b = -5, c = -2$ です。

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$ なので、 $D > 0$ です。

したがって、放物線と x 軸の共有点は 2 個です。

練習問題 5 の解答・解説

$a = -1, b = 6, c = -9$ です。

$D = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$ です。

したがって、放物線と x 軸の共有点は 1 個です。

練習問題 6 の解答・解説

$a = 2, b = -4, c = 5$ です。

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24$ なので、 $D < 0$ です。

したがって、放物線と x 軸の共有点は 0 個です。

練習問題 7 の解答・解説

共有点では $x^2 + x = 3x + 3$ です。

整理すると、

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

です。

$a = 1, b = -2, c = -3$ なので、 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ です。

$D > 0$ なので、共有点は 2 個です。

練習問題 8 の解答・解説

共有点では $x^2 + 4x + 1 = -2$ です。

整理すると、

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

です。

$a = 1, b = 4, c = 3$ なので、 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$ です。

$D > 0$ なので、共有点は 2 個です。

練習問題 9 の解答・解説

判別式 D は方程式の解そのものではなく、実数解の個数を判断するための値です。

この方程式では $D = -16 < 0$ です。

したがって、実数解は 0 個です。