

第 106 講 正弦・余弦のグラフ

学習目標

この講では、正弦関数と余弦関数の基本グラフを、単位円上の点の動きと対応させて理解する。教材終了後には、次のことができるようになる。

- ・ 単位円上の点 $(\cos x, \sin x)$ と、グラフ上の点 $(x, \sin x)$ 、 $(x, \cos x)$ の違いを説明できる。
- ・ ラジアンで表された角度に対して、正弦・余弦の代表的な値を読み取れる。
- ・ 最大値・最小値・符号・零点・周期をグラフから判断できる。
- ・ 代表点だけを直線で結ぶ誤りを避け、連続した変化としてグラフを理解できる。

単位円から正弦・余弦のグラフを見る

単位円上の座標とグラフ上の座標

三角関数のグラフを理解するには、単位円上の点とグラフ上の点を区別することが重要である。単位円とは、原点を中心とする半径 1 の円である。

角 x をラジアンで表し、始線を横軸の正の向きとして、そこから反時計回りに回転した角として表す。正の角は反時計回りの回転で定める。

このとき、終辺と単位円の交点の座標は $(\cos x, \sin x)$ で表される。

この座標では、 $\cos x$ が横座標、 $\sin x$ が縦座標である。

一方、正弦のグラフ $y = \sin x$ 上の点は $(x, \sin x)$ である。

横軸は角度 x 、縦軸はその角度に対応する値を表している。単位円上の点そのものを描いているのではない。

余弦についても同様で、単位円上では横座標の変化を見て、グラフでは $(x, \cos x)$ という点の集まりを考える。

連続した動きが曲線を作る

単位円上の点は、角度が少しずつ変化すると円周上を連続的に動く。

例えば、 x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化すると、単位円上の点は右端から上端へ移動する。このとき縦座標 $\sin x$ は 0 から 1 へ変化し、横座標 $\cos x$ は 1 から 0 へ変化する。

ここで注意すべきことは、代表点だけを直線で結んでいるわけではないということである。

代表点は、曲線の特徴を確認するための目印である。各角度に対して単位円上の座標が定まり、その値を順につないだ結果として滑らかなグラフになる。

正弦関数の基本グラフ

正弦関数

正弦関数は $y = \sin x$ で表される。

単位円上の点 $(\cos x, \sin x)$ の縦座標を、角度 x の関数として表したものである。

代表的な値は次のようになる。

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

これらはグラフの形を決める重要な点である。

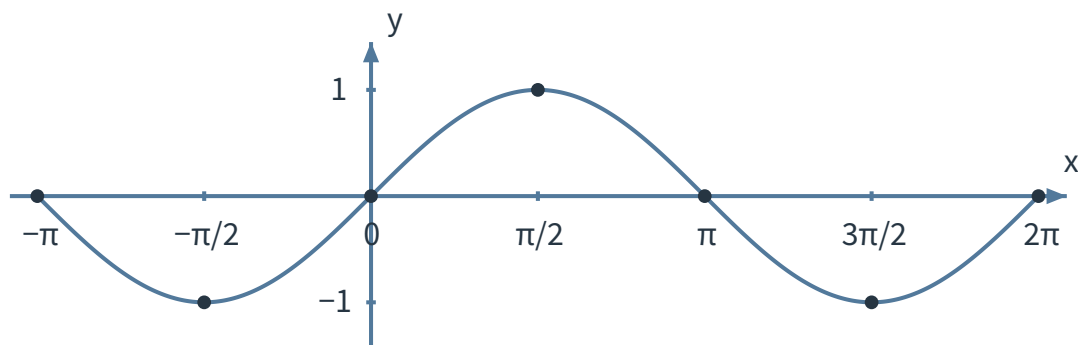


図1 正弦のグラフ（横軸の角度はラジアン）

正弦グラフの読み取り

正弦関数では、次の特徴を読み取る。

- $x = 0$ では $y = 0$ から始まる。
- $\frac{\pi}{2}$ で最大値 1 になる。
- π で 0 に戻る。
- $\frac{3\pi}{2}$ で最小値 -1 になる。
- 2π で 1 周期分が終了し、同じ変化を繰り返す。

また、符号は単位円上の縦座標の符号から判断できる。

上半分では $\sin x > 0$ 、下半分では $\sin x < 0$ となる。

余弦関数の基本グラフ

余弦関数

余弦関数は $y = \cos x$ で表される。

単位円上の点 $(\cos x, \sin x)$ の横座標を、角度 x の関数として表したものである。

代表的な値は次のようになる。

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

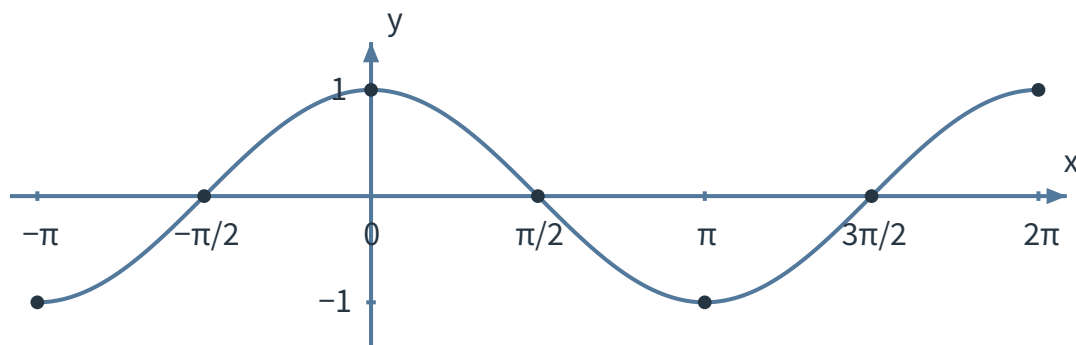


図2 余弦のグラフ（横軸の角度はラジアン）

正弦と余弦の違い

正弦と余弦はどちらも最大値 1、最小値 -1 を取り、周期 2π で繰り返す。

違いは、どの座標を見ているかである。

- ・ 正弦は単位円上の縦座標を見る。
- ・ 余弦は単位円上の横座標を見る。

そのため、 $y = \cos x$ は $x = 0$ で最大値 1 から始まり、 $y = \sin x$ は $x = 0$ で 0 から始まる。また、角が 2π 増えると単位円上の点はちょうど 1 周して同じ位置に戻る。そのため、対応する縦座標と横座標も同じ値になる。

したがって、 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ 、 $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ が成り立つ。

この 2π ごとの繰返しが、正弦関数と余弦関数の周期性を生み出している。

例題

正弦の最大値と最小値

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $y = \sin x$ の最大値と最小値を取る x の値を求めなさい。

正弦の最大値と最小値の解答・解説

正弦の代表点を確認する。 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ であり、 $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ である。

したがって、最大値は 1 であり、そのとき $x = \frac{\pi}{2}$ である。

また、最小値は -1 であり、そのとき $x = \frac{3\pi}{2}$ である。

正弦の最大・最小は、単位円上で縦座標が最も高い位置、最も低い位置になる角度に対応する。

余弦の零点

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $y = \cos x$ が 0 になる x の値を求めなさい。

余弦の零点の解答・解説

余弦は単位円上の横座標である。

横座標が 0 になるのは、単位円上の点が上下の位置にあるときである。

したがって、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。

グラフでは、この 2 点で x 軸と交わることを意味する。

限定区間の正弦グラフ

$0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ における $y = \sin x$ のグラフについて、最大値と最小値を求めなさい。

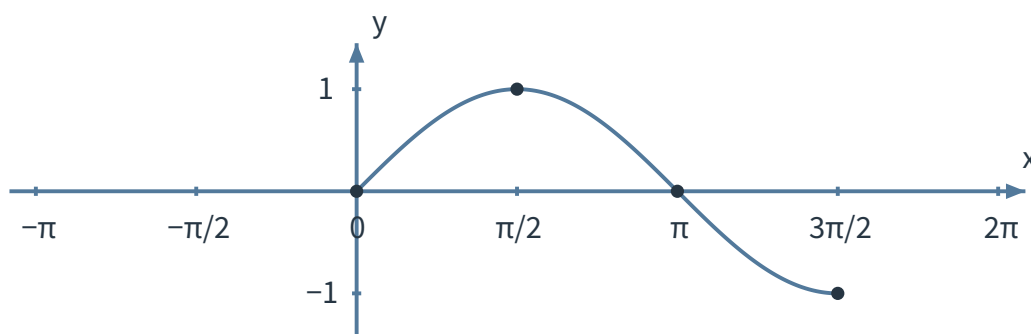


図 3 $0 \leq x \leq 3\pi/2$ における正弦のグラフ

限定区間の正弦グラフの解答・解説

図の範囲では、正弦は $x = 0$ から始まり、 $x = \frac{\pi}{2}$ で最大値を取り、その後減少する。

さらに、 $x = \frac{3\pi}{2}$ で最小値になる。

したがって、最大値は 1、最小値は -1 である。

ただし、この判断は代表点を直線で結んだからではない。各角度に対して単位円上の点が定まり、その縦座標である $\sin x$ の値が決まることからグラフの形が決まるのである。

演習問題

正弦の符号

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin x < 0$ となる範囲を答えなさい。端点を含むかどうかも含め答えなさい。

余弦の最大値

$y = \cos x$ の最大値と、その値を取る x の例を 1 つ答えなさい。

正弦の代表点

$y = \sin x$ において、 $x = \pi$ のときの値を答えなさい。

正弦と余弦のグラフ識別

次の特徴を持つ関数を、 $y = \sin x$ または $y = \cos x$ から選び、理由を述べなさい。
「 $x = 0$ で最大値 1 を取り、 2π ごとに同じ形を繰り返す。」

定義域がある正弦グラフ

$y = \sin x$ について、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ における値域を求めなさい。また、最大値・最小値を取る x の値を答えなさい。

代表点だけで判断しない理由

「 $y = \sin x$ のグラフは、 x の値が $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ となる 5 つの代表点を直線で結べばよい」という説明が誤りである理由を述べなさい。

余弦の符号と範囲

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\cos x < 0$ となる範囲を答えなさい。また、その範囲の端点を含まない理由を述べなさい。

周期を利用した値の計算

$y = \sin x$ について、 $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ のときの値を求めなさい。

演習問題の解答・解説**正弦の符号の解答・解説**

単位円で考えると、 $\sin x$ は縦座標である。

$0 \leq x \leq 2\pi$ では、第 3 象限と第 4 象限で縦座標が負になる。

したがって、 $\pi < x < 2\pi$ である。

$x = \pi$ と $x = 2\pi$ では $\sin x = 0$ となるため、条件 $\sin x < 0$ を満たさない。

よって、端点は含まない。

余弦の最大値の解答・解説

余弦は単位円上の横座標を表す。

横座標が最も大きくなるのは円の右端であり、その値は 1 である。

$x = 0$ のとき、 $\cos 0 = 1$ である。

したがって、最大値は 1 であり、その値を取る角度の例は $x = 0$ である。

正弦の代表点の解答・解説

正弦は単位円上の縦座標である。

$x = \pi$ のとき、点は単位円の左端に位置するため、縦座標は 0 になる。

したがって、 $\sin \pi = 0$ である。

正弦と余弦のグラフ識別の解答・解説

候補は $y = \sin x$ と $y = \cos x$ の 2 つである。

$x = 0$ のとき、 $\sin 0 = 0$ であり最大値 1 ではない。

一方、 $\cos 0 = 1$ である。

したがって、この特徴を持つ関数は $y = \cos x$ である。

理由は、余弦が単位円上の横座標を表し、 $x = 0$ では右端の点にあるため最大値 1 になるからである。

定義域がある正弦グラフの解答・解説

範囲は $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ である。

この区間では、正弦の値は 1 から 0 へ減少する。

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ であり、

$x = \pi$ のとき、 $\sin \pi = 0$ である。

したがって値域は $0 \leq y \leq 1$ である。

最大値は 1 で、 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき取る。

最小値は 0 で、 $x = \pi$ のとき取る。

代表点だけで判断しない理由の解答・解説

5 つの代表点は、グラフの特徴を確認するための目印であり、直線で結ぶための点ではない。

例えば、正弦の代表点 $(0, 0)$ と $(\frac{\pi}{2}, 1)$ を直線で結ぶと、その直線上では $x = \frac{\pi}{6}$ のときの値は $y = \frac{1}{3}$ になる。

しかし、実際の正弦の値は単位円上の点の縦座標で決まるため、 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ であり、直線で結んだ値とは一致しない。

したがって、代表点を直線で結んだ折れ線は正しい正弦のグラフではない。各角度に対して単位円上の座標が定まり、その座標から得られる値がグラフを決めているのである。

余弦の符号と範囲の解答・解説

余弦は単位円上の横座標である。

横座標が負になるのは左半分であり、第 2 象限と第 3 象限に対応する。

したがって、 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ である。

$x = \frac{\pi}{2}$ と $x = \frac{3\pi}{2}$ では、単位円上の点は上下に位置し、横座標は 0 になる。

条件は $\cos x < 0$ であり、0 は含まれないため、端点は含まない。

周期を利用した値の計算の解答・解説

正弦は周期 2π の関数である。

したがって、 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ が成り立つ。

よって、 $\sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2}$ となる。

さらに、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ である。

したがって、求める値は 1 である。