

第166講 データから数学的モデルを作る

学習目標

この講では、データをそのまま見るだけでなく、数式で表すモデルを作る考え方を学ぶ。
具体的には、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ データと数学的モデルを区別できる。
- ・ $y = ax + b$ という形のモデルを候補として、データから係数 a, b を決められる。
- ・ 作ったモデルの値と観測値を比較し、ずれを調べられる。

データを数式で表すという考え方

現実の現象では、時間による位置の変化、個数による質量の変化、測定値の変化など、さまざまなデータが得られる。

しかし、表に並んだ数値だけでは、変化の特徴を読み取りにくい場合がある。そこで、データの関係を表す数式を候補として選び、その式を数学的モデルとして扱う。

数学的モデルとは、現実の複雑な状況を、ある数式や関係で表したものである。

ただし、モデルは現実そのものではない。選んだ形の式がデータをどの程度表しているかを確認する必要がある。

一次の形のモデル

データの関係を表す候補として、次の形を考える。

$$y = ax + b$$

ここで、 a, b は実数である。

$a = 0$ の場合は $y = b$ となり、一定の値を表すモデルも含まれるため、この講では単に「一次式」と呼ぶのではなく、「一次の形のモデル」と表現する。

a は x が1増えるときのモデル値の変化量を表し、 b は式 $ax + b$ に形式的に $x = 0$ を代入したときの値である。

ただし、0 が検討範囲の外にある場合、その値でモデルを実際に使えることや、実測された値であることを意味しない。

2点から係数を決める

x の値が異なる2点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を通る一次の形のモデル $y = ax + b$ を考える。

このとき、 $x_1 \neq x_2$ である必要がある。

モデルが2点を通ることから、

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

である。

2つの式を引くと、

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b)$$

$$= a(x_2 - x_1)$$

となり、 b が消える。

$x_2 - x_1 \neq 0$ なので、

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と求められる。

その後、求めた a と 1 点の座標を $y = ax + b$ に代入すると、 $b = y_1 - ax_1$ として b が求まる。
したがって、この形のモデルを採用するとき、2 点の条件から係数 a, b の組は一意に決まる。
求めた係数を式へ戻して 2 点を代入すると、もとの 2 点を通ることも確認できる。

モデルを見るとき注意

作ったモデルを確認するときは、各観測点の x を式へ代入してモデル値を求め、その同じ x における観測値 y と比較する。

採用に使わなかったデータ点がある場合も、同じように照合することで、モデルがどの程度データを表しているかを確認できる。

ずれは、観測値からモデル値を引いた数として考える。

ずれが正の場合は、観測値の方がモデル値より大きいことを表す。

ずれが 0 の場合は、観測値とモデル値が一致していることを表す。

ずれが負の場合は、観測値の方がモデル値より小さいことを表す。

2 点から一次の形のモデルの係数が一意に決まることは、この形の中での係数の決定について述べたものである。

有限個のデータから、実際の現象全体の真の法則が必ずその式であると証明されたことを意味するわけではない。

教材データについて

この講で扱う表や数値は、数学を学ぶために作った架空の記録である。実在の実験や実測を行った結果ではない。

文字 x, y は指定された単位で測った数値を表す。

例題 1

架空の装置について、時刻 x (秒) と位置 y (m) の記録が次のように得られた。

時刻 x (秒)	0	2	4	6
位置 y (m)	4	7	10	13

この記録について、一次の形のモデル $y = ax + b$ を考える。

最初の点と最後の点を使って a, b を求め、残りの 2 点でも一致するか確認しなさい。

ただし、検討する範囲は $0 \leq x \leq 6$ の実数とする。

例題 1 の解答・解説

最初と最後の点は $(0, 4)$ 、 $(6, 13)$ である。

x の増加量は 6、 y の増加量は $13 - 4 = 9$ である。

したがって、変化の割合 a は、

$$a = \frac{13 - 4}{6 - 0} = \frac{9}{6} = 1.5$$

となる。

ここで、 y の増加量だけを見るのではなく、 x の増加量でも割っていることが重要である。

次に、点 $(0, 4)$ を $y = ax + b$ に代入する。

$4 = 1.5 \times 0 + b$ より、 $b = 4$ である。

したがって、作ったモデルは $y = 1.5x + 4$ となる。

残りの点を確認する。

$x = 2$ のとき、 $y = 1.5 \times 2 + 4 = 7$ であり、記録の値 7 と一致する。

$x = 4$ のとき、 $y = 1.5 \times 4 + 4 = 10$ であり、記録の値 10 と一致する。

よって、この 4 つの記録は作った一次の形のモデルと一致する。

ただし、この一致だけから、区間中や区間外での実際の動きが必ずこの式になると決めることはできない。このモデルは、与えられたデータを表すために選んだ数学的な表現である。

例題 2

架空の包装記録として、品物の個数 x (個) と全体質量 y (g) が次の 2 点で記録された。

$(2, 14)$, $(5, 26)$

一次の形のモデル $y = ax + b$ を、この 2 点を通るように作りなさい。

また、2 点で異なる x の値が必要である理由を説明しなさい。

ただし、 x は 2 個から 5 個までの整数の範囲で考える。

例題 2 の解答・解説

2 点 (2, 14)、(5, 26) の間で考える。

x の増加量は、 $5 - 2 = 3$ である。

y の増加量は、 $26 - 14 = 12$ である。

したがって、

$$a = \frac{26 - 14}{5 - 2} = \frac{12}{3} = 4$$

となる。

次に、点 (2, 14) を代入する。

$14 = 4 \times 2 + b$ より、 $b = 6$ である。

したがって、モデルは $y = 4x + 6$ となる。

2 点で異なる x の値が必要なのは、単に計算のためだけではない。

同じ x に異なる y が対応する場合、1 つの x に対してモデルの値は 1 つしか決まらないため、両方の点へ完全に一致する一次の形のモデルは作れない。

一方で、同じ x と同じ y の記録が重複している場合は、実質的には 1 点分の情報しかない。その場合、係数 a, b の組を一意に決める条件が不足する。

したがって、異なる x をもつ 2 点の情報が必要である。

なお、この式で $x = 0$ のときの値は数式上では $b = 6$ になるが、この表では $x = 0$ の質量を測定したわけではない。また、容器の質量が必ず 6 g であると断定することもできない。

例題 3

架空の測定装置について、移動距離 x (cm) と表示電圧 y (V) のデータが得られた。

x (cm)	0	1	2	3	4
観測値 y (V)	2	6	8	12	14

このデータについて、最初と最後の 2 点を通る一次の形のモデルを選ぶことにする。

検討する範囲は $0 \leq x \leq 4$ の実数とする。

作ったモデルの式を求め、5 つの観測値とモデル値を比較しなさい。

また、完全一致しない場合、その意味を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

最初と最後の点は (0, 2)、(4, 14) である。

変化の割合は、

$$a = \frac{14 - 2}{4 - 0} = \frac{12}{4} = 3$$

となる。

点 (0, 2) を代入すると、 $2 = 3 \times 0 + b$ より、 $b = 2$ である。

したがって、選んだモデルは $y = 3x + 2$ となる。

このモデルを使った値と観測値を比較する。

x (cm)	観測値 (V)	モデル値 (V)	観測値-モデル値 (V)
0	2	2	0
1	6	5	1
2	8	8	0

x (cm)	観測値 (V)	モデル値 (V)	観測値-モデル値 (V)
3	12	11	1
4	14	14	0

$x = 1$ と $x = 3$ では、観測値とモデル値が一致していない。

これは、作ったモデルがすべてのデータを完全に表しているわけではないことを意味する。

このモデルは指定した 2 点を通す方針で作ったもので、全データに最もよく合うことを示したものではない。

また、観測値とモデル値にずれがある場合でも、その原因を測定誤差であると断定することはできない。

ずれが生じる理由には、データの特徴や、選んだモデルの形など複数の可能性があるため、数値を比較してモデルの表し方を検討することが大切である。

モデルは、どのような形を採用するかによって結果が変わる。ここでは「最初と最後の 2 点を通る一次の形のモデルを選ぶ」という方針で作った式と、観測値との違いを確認している。

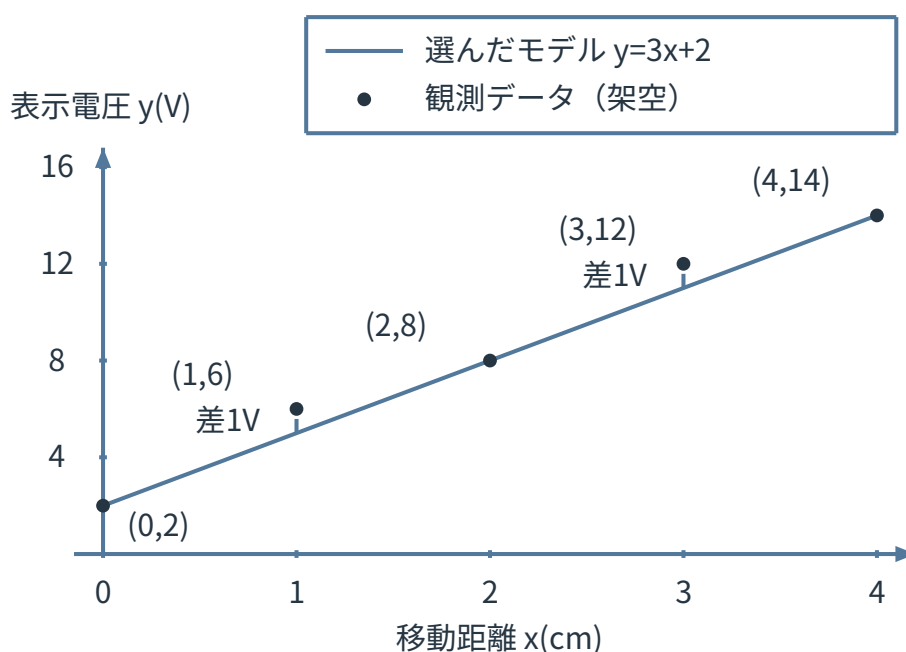


図1 黒点は教材用の架空の観測データ、実線は最初と最後の2点を通る一次モデル $y=3x+2$ である。 $x=1$ と 3 では観測値がモデル値より 1V 大きい。描いたモデルは $0 \leq x \leq 4$ の範囲に限る。縦横の縮尺は異なるため、傾きは座標の数値から読む。この直線が真の法則や最良の近似であるとは主張していない。

演習問題

練習問題 1

架空の教材用データとして、時刻 x (秒) と、あらかじめ定めた原点を基準にした位置 y (m) の架空記録を考える。

x (秒)	0	3	6
y (m)	2	8	14

このデータは実在の測定結果ではない。

最初と最後の 2 点を使い、一次の形のモデル $y = ax + b$ を作りなさい。

また、中央の点でも一致するか確認しなさい。

検討する範囲は $0 \leq x \leq 6$ の実数である。

練習問題 2

架空の教材用データとして、温度変化を表す記録を考える。

時刻 x (分)	1	3	5
温度 y ($^{\circ}\text{C}$)	18	14	10

このデータは実在の測定結果ではない。

最初と最後の 2 点を使って、一次の形のモデル $y = ax + b$ を作りなさい。

また、 a の符号が表す意味を説明しなさい。

検討する範囲は $1 \leq x \leq 5$ の実数である。

練習問題 3

x, y とも無単位の架空教材用座標データとして、ある記録の値を考える。

x	0	1	2
y	5	5	5

このデータは実在の測定結果ではない。

一次の形のモデル $y = ax + b$ を考えるとき、係数 a, b を求めなさい。

また、このモデルが表す変化を説明しなさい。

x は $0 \leq x \leq 2$ の整数で考える。

練習問題 4

架空の教材用データとして、無単位の座標データを考える。

x	2	5	8
y	7	13	19

このデータは実在の測定結果ではない。

(1) 最初の 2 点 $(2, 7), (5, 13)$ を使って一次の形のモデル $y = ax + b$ を作りなさい。

(2) 3 点目 $(8, 19)$ がモデル上でも成り立つか確認しなさい。

検討する範囲は $2 \leq x \leq 8$ の実数である。

練習問題 5

架空の教材用データとして、無単位の座標データを考える。

x	0	1	2	3
観測値 y	3	5	6	9

このデータは実在の測定結果ではない。

最初と最後の 2 点 $(0, 3), (3, 9)$ を使って、一次の形のモデルを作る。

(1) モデルの式を求めなさい。

(2) $x = 1, 2$ での観測値とモデル値のずれを求めなさい。ただし、ずれは観測値からモデル値を引いた数とする。

検討する範囲は $0 \leq x \leq 3$ の実数である。

練習問題 6

架空の教材用データとして、無単位の座標データを考える。

x	1	1	2
観測値 y	4	6	8

このデータは実在の測定結果ではない。

一次の形のモデル $y = ax + b$ を使って、すべての点に完全一致するモデルを作れるか説明しなさい。

検討する範囲は $1 \leq x \leq 2$ の整数である。

練習問題 7

架空の教材用データとして、無単位の座標データを考える。

x	3	3
y	10	10

このデータは実在の測定結果ではない。

(1) この 2 つの記録が、実質的には何点の情報と考えられるか説明しなさい。

(2) 一次の形のモデル $y = ax + b$ が 1 つに決まらない理由を説明しなさい。

候補式の検討範囲は $2 \leq x \leq 4$ の実数とする。ただし、未観測値の予測は問わない。

練習問題 8

架空の教材用データとして、無単位の座標データを考える。

x	0	4
y	2	10

このデータは実在の測定結果ではない。

次の考えが正しいか誤っているかを答え、理由を説明しなさい。

「2 点から一次の形のモデルの係数 a, b が決まったので、この現象の真の法則は必ず $y = ax + b$ であると証明された。」

検討する範囲は $0 \leq x \leq 4$ の実数である。

練習問題 1 の解答・解説

2 点 $(0, 2)$ 、 $(6, 14)$ を使う。

x の増加量は 6、 y の増加量は 12 なので、

$$a = \frac{14 - 2}{6 - 0} = \frac{12}{6} = 2$$

となる。

点 $(0, 2)$ を代入すると、 $2 = 2 \times 0 + b$ より、 $b = 2$ である。

したがって、モデルは $y = 2x + 2$ となる。

中央の点 $x = 3$ では、 $y = 2 \times 3 + 2 = 8$ となり、記録の値と一致する。

x の刻みが 1 ではなくても、変化の割合は x の増加量で割って求める。

練習問題 2 の解答・解説

2 点 $(1, 18)$ 、 $(5, 10)$ を使う。

$$a = \frac{10 - 18}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

となる。

点 $(1, 18)$ を代入すると、 $18 = -2 \times 1 + b$ より、 $b = 20$ である。

したがって、モデルは $y = -2x + 20$ となる。

a が負であることは、 x が増えると y が減少するモデルであることを表す。

練習問題 3 の解答・解説

どの記録でも y は 5 で一定である。

一次の形のモデル $y = ax + b$

で表すには、 x が変化しても値が変わらないため、 $a = 0$ とする。

すると、 $y = b$ となり、記録から $b = 5$ である。

したがって、モデルは $y = 5$ となる。

$a = 0$ の場合も一次の形のモデルに含まれる。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 2 点 $(2, 7)$ 、 $(5, 13)$ を使う。

$$a = \frac{13 - 7}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

となる。

点 $(2, 7)$ を代入すると、 $7 = 2 \times 2 + b$ より、 $b = 3$ である。

したがって、 $y = 2x + 3$ となる。

(2) $x = 8$ のとき、 $y = 2 \times 8 + 3 = 19$ となる。

3 点目の値と一致するので、3 点すべてがこのモデル上にある。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 2 点 $(0, 3)$ 、 $(3, 9)$ を使う。

$$a = \frac{9 - 3}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$$

となる。

また、 $b = 3$ なので、 $y = 2x + 3$ である。

(2) $x = 1$ のときのモデル値は、 $2 \times 1 + 3 = 5$ である。

ずれは、 $5 - 5 = 0$ となる。

$x = 2$ のときのモデル値は、 $2 \times 2 + 3 = 7$ である。

ずれは、 $6 - 7 = -1$ となる。

ずれが正の場合は観測値がモデル値より大きく、負の場合は観測値がモデル値より小さいことを表す。

練習問題 6 の解答・解説

同じ $x = 1$ に対して、観測値が 4 と 6 の 2 つ存在する。

しかし、一次の形のモデル $y = ax + b$ では、1 つの x を代入すると y は 1 つに決まる。

したがって、 $x = 1$ のときに 2 つの値を同時に表すことはできない。

よって、この 3 点すべてに完全一致する一次の形のモデルは作れない。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 2 つの記録はどちらも、

$(3, 10)$ という同じ点を表している。

したがって、実質的には 1 点の情報である。

(2) 1 点だけでは、一次の形のモデル $y = ax + b$ の係数を決める条件が不足している。

例えば、 $y = x + 7$ では $x = 3$ のとき $y = 10$ になる。

また、 $y = 2x + 4$ でも $x = 3$ のとき $y = 10$ になる。

このように、どちらの式も同じ記録に一致する。

さらに、任意の実数 a に対して、 $b = 10 - 3a$

とすれば、 $y = ax + b$ は $x = 3$ のとき、 $y = 3a + (10 - 3a) = 10$ となる。

したがって、この記録に一致する係数の組は無数に存在し、 a, b は一意に決まらない。

練習問題 8 の解答・解説

この考えは誤りである。

2 点 $(0, 2)$ 、 $(4, 10)$ から、一次の形のモデルを作ることができる。

$$a = \frac{10 - 2}{4 - 0} = 2$$

となる。

点 $(0, 2)$ を代入すると、 $2 = 2 \times 0 + b$ より、 $b = 2$ である。

したがって、 $y = 2x + 2$ となる。

しかし、これは「選んだ形のモデルの係数が決まった」という意味である。

有限個のデータだけから、その現象の真の全域法則が必ずこの式であると証明されたわけではない。

モデルは、目的に応じて選んだ数学的な表現であり、実際の現象をどの範囲で表せるかを確認しながら使う必要がある。