

第 14 講 集合と集合の表し方

学習目標

- ・ 集合と要素の意味を説明し、 $a \in A$ 、 $a \notin A$ を正しく使える。
- ・ 集合を要素を書き並べる方法と、要素の条件を示す方法で表せる。
- ・ 部分集合の関係を $A \subset B$ などの記号で表せる。
- ・ 共通部分・和集合・補集合を、ベン図や要素から判断できる。

集合は「条件を満たすものをひとまとめたもの」

何を仲間に入れるかがはっきりしている集まり

「好きな食べ物の集まり」のように、人によって判断が変わるものでは、何が仲間に入るかがはっきりしません。一方、「10 以下の正の偶数」のように条件が決まっていれば、どの数が仲間に入るかを明確に判断できます。このように、**あるものがその集まりに属するかどうかをはっきり判断できる集まり**を、集合といいます。たとえば、10 以下の正の偶数全体の集合を A とすると、

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

と表せます。

集合と要素

ある条件によって、そこに属するかどうかをはっきり判断できるものの集まりを**集合**といいます。集合をつくっている一つ一つのものを、その集合の**要素**といいます。

要素であることを表す記号

a が集合 A の要素であるとき、

$$a \in A$$

と表します。

a が集合 A の要素でないとき、

$$a \notin A$$

と表します。

要素かどうかを判断する

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ とします。

3 は A の要素なので、 $3 \in A$ です。

一方、4 は A の要素ではないので、 $4 \notin A$ です。

集合の 2 つの表し方

要素を書き並べる

集合の要素が少ないときは、すべての要素を波括弧の中に書き並べることができます。たとえば、12 の正の約数全体の集合 A は、

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

と表せます。

集合では要素の並べ方に意味はありません。そのため、

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

です。

また、同じ要素を何度書いても、新しい要素が増えるわけではありません。

条件を使って表す

要素が多い場合や、すべてを書き並べるのが難しい場合は、要素が満たす条件を使って集合を表します。

たとえば、「1 以上 10 以下の偶数全体」は、

$$\{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 10 \text{ 以下の偶数}\}$$

のように表せます。

縦線 $|$ は、「そのような」「ただし」という意味で使われます。

大切なのは、**どのようなものが要素になるのかを条件で明確にすること**です。

集合と要素を混同しない

3 は数そのものですが、 $\{3\}$ は 3 だけを要素にもつ集合です。

したがって、3 と $\{3\}$ は同じものではありません。

たとえば、 $A = \{1, 2, 3\}$ なら $3 \in A$ ですが、 $\{3\}$ が A の要素であるとは限りません。

一方の集合がもう一方にすべて含まれるとき

一つずつではなく、全部入っているかを見る

$A = \{2, 4\}$ 、 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とします。
 A の要素である 2 と 4 は、どちらも B の要素です。
つまり、 A の要素がすべて B に含まれています。
このとき、 A は B の部分集合であるといいます。

部分集合

集合 A のすべての要素が集合 B に含まれているとき、 A は B の部分集合であるといい、

$$A \subset B$$

と表します。

$\in$ と $\subset$ は役割が違う

$a \in A$ は、「1 つの要素 a が集合 A に入っている」という関係です。
一方、 $A \subset B$ は、「集合 A の要素がすべて集合 B に入っている」という、集合どうしの関係です。
要素と集合の関係には $\in$ 、集合と集合の包含関係には $\subset$ を使います。

共通するものと、どちらかに入るもの

共通部分

集合 A と集合 B の両方に属する要素全体の集合を、 A と B の共通部分といい、

$$A \cap B$$

と表します。

和集合

集合 A または集合 B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を、 A と B の和集合といい、

$$A \cup B$$

と表します。

共通部分は重なり、和集合は合わせた全体

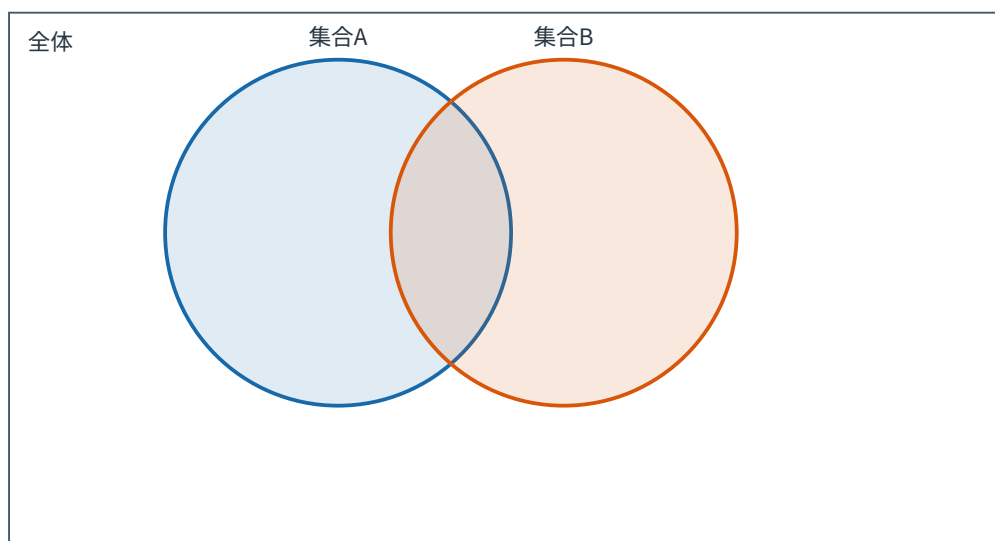
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ とします。
両方に入っているのは 3, 4 なので、

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

です。
少なくとも一方に入っている要素をすべて集めると、

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

です。
和集合では、3 や 4 を 2 回書く必要はありません。集合では、同じ要素を重複して数えないからです。



$A \cap B$ は 2 集合の重なった部分

■ 全体集合と補集合

全体集合

考えている対象をすべて含む集合を**全体集合**といいます。

補集合

全体集合 U の中で、集合 A に属さない要素全体の集合を、 A の**補集合**といいます。

補集合は全体集合の中で考える

全体集合を

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

とし、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

とします。

U の要素のうち A に入っていないものは $1, 3, 5$ なので、 A の補集合は $\{1, 3, 5\}$ です。

補集合を考えるときは、「何を全体として考えているか」が必要です。同じ集合 A でも、全体集合が変われば補集合も変わります。

集合を扱うときの判断軸

集合の問題では、次の順に考えます。

1. 何が要素になるのかを確認する。
2. $\in$ なら 1 つの要素と集合の関係を見る。
3. $\subset$ なら集合の要素がすべて含まれるかを見る。
4. $\cap$ なら両方に入るものを探す。
5. $\cup$ なら少なくとも一方に入るものを集める。
6. 補集合なら、全体集合からその集合の要素を除く。

■ 例題

例題 1

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ とする。次の関係が正しければ「正」、誤っていれば「誤」と答えなさい。

- (1) $4 \in A$
- (2) $5 \in A$
- (3) $5 \notin A$

例題 1 の解答・解説

- (1) 4 は集合 A に書かれている要素なので、 $4 \in A$ は正です。
(2) 5 は A の要素ではないので、 $5 \in A$ は誤です。
(3) 5 は A の要素ではないので、 $5 \notin A$ は正です。
 $\in$ と $\notin$ は、ある 1 つのものが集合の要素であるかどうかを表します。

例題 2

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $B = \{2, 4\}$ 、 $C = \{2, 5\}$ とする。

- (1) $B \subset A$ が成り立つか答えなさい。
- (2) $C \subset A$ が成り立つか答えなさい。

例題 2 の解答・解説

- (1) B の要素は $2, 4$ です。どちらも A に含まれているので、 $B \subset A$ が成り立ちます。
(2) C の要素は $2, 5$ です。5 は A の要素ではありません。
したがって、 $C \subset A$ は成り立ちません。
部分集合かどうかは、いくつかの要素が含まれているだけでは不十分です。**すべての要素が含まれているか**を確認します。

例題 3

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $B = \{3, 4, 5\}$ とする。次の集合を求めなさい。

- (1) $A \cap B$
- (2) $A \cup B$

例題 3 の解答・解説

- (1) A と B の両方に入っている要素は $3, 4$ です。

したがって、

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

です。

- (2) A または B の少なくとも一方に入る要素を、重複させずに集めます。

したがって、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ です。

演習問題

練習問題 1

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。次の関係が正しければ「正」、誤っていれば「誤」と答えなさい。

- (1) $3 \in A$
- (2) $6 \in A$
- (3) $8 \notin A$
- (4) $9 \notin A$

練習問題 2

次の集合を、要素を書き並べる方法で表しなさい。

- (1) 10 以下の正の奇数全体の集合
- (2) 18 の正の約数全体の集合

練習問題 3

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。次の集合のうち、 A の部分集合であるものをすべて選びなさい。

- (ア) $\{1, 3\}$
- (イ) $\{2, 5\}$
- (ウ) $\{1, 6\}$
- (エ) $\{3, 4, 5\}$

練習問題 4

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ 、 $B = \{2, 3, 4, 5\}$ とする。次の集合を求めなさい。

- (1) $A \cap B$
- (2) $A \cup B$

練習問題 5

全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 、その部分集合を $A = \{2, 4, 6, 8\}$ とする。
 A の補集合を、要素を書き並べて表しなさい。

練習問題 6

全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする。

A を「 U の要素のうち偶数であるもの全体」、 B を「 U の要素のうち 3 の倍数であるもの全体」とする。

- (1) 集合 A 、 B を、それぞれ要素を書き並べて表しなさい。
- (2) $A \cap B$ を求めなさい。
- (3) $A \cup B$ を求めなさい。

練習問題 7

$A = \{1, 2, 3\}$ とする。

次のうち、正しいものをすべて選びなさい。

- (ア) $2 \in A$
- (イ) $\{2\} \in A$
- (ウ) $\{2\} \subset A$
- (エ) $4 \notin A$

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) 3 は A の要素なので正です。
 - (2) 6 は A の要素ではないので誤です。
 - (3) 8 は A の要素ではないので正です。
 - (4) 9 は A の要素なので、 $9 \notin A$ は誤です。
- したがって、順に「正、誤、正、誤」です。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) 10 以下の正の奇数は 1, 3, 5, 7, 9 です。
- したがって、

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

です。

- (2) 18 を割り切る正の整数を小さい順に探すと、1, 2, 3, 6, 9, 18 です。
- したがって、

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

(ア) $\{1, 3\}$ の要素はどちらも A に含まれているので、 A の部分集合です。
(イ) $\{2, 5\}$ の要素はどちらも A に含まれているので、 A の部分集合です。
(ウ) $\{1, 6\}$ には A に含まれない 6 があるので、 A の部分集合ではありません。
(エ) $\{3, 4, 5\}$ の要素はすべて A に含まれているので、 A の部分集合です。
したがって、正しいものは (ア)、(イ)、(エ) です。

練習問題 4 の解答・解説

(1) A と B の両方に含まれている要素は $2, 4$ です。
したがって、 $A \cap B = \{2, 4\}$ です。
(2) A または B の少なくとも一方に含まれる要素を集めると、 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ です。
したがって、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

全体集合 U の要素から、 A に含まれる $2, 4, 6, 8$ を除きます。

練習問題 5 の解答・解説 (続き)

残る要素は $1, 3, 5, 7$ です。
したがって、 A の補集合は $\{1, 3, 5, 7\}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

(1) U の中の偶数を集めると、 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ です。
 U の中の 3 の倍数を集めると、 $B = \{3, 6, 9\}$ です。

練習問題 6 の解答・解説 (2)

(2) A と B の両方に含まれる要素は 6 だけです。
したがって、 $A \cap B = \{6\}$ です。

練習問題 6 の解答・解説 (3)

(3) A または B の少なくとも一方に入る要素を集めます。
したがって、 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ です。

練習問題 7 の解答・解説

(ア) 2 は A の要素なので、 $2 \in A$ は正しいです。
(イ) A の要素は $1, 2, 3$ であり、集合 $\{2\}$ 自体が要素として入っているわけではありません。したがって、 $\{2\} \in A$ は誤りです。

練習問題 7 の解答・解説 (ウ・エ)

(ウ) 集合 $\{2\}$ の唯一の要素 2 は A に含まれています。したがって、 $\{2\} \subset A$ は正しいです。
(エ) 4 は A の要素ではないので、 $4 \notin A$ は正しいです。
したがって、正しいものは (ア)、(ウ)、(エ) です。
この問題では、要素と集合を区別することがポイントです。 2 は 1 つの要素ですが、 $\{2\}$ は集合です。