第 241 講 二次曲線の平行移動

学習目標

- 原点中心の二次曲線を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動すると、式の x, y をそれぞれ $x-p, y-q$ に置き換える理由を説明できる。
- 平行移動した放物線・楕円・双曲線の頂点、中心、焦点、準線、漸近線を求められる。
- 一般形を平方完成して標準形へ直し、二次曲線の種類と位置を読み取れる。

1. 図形を動かすと式には逆向きの差が入る

点の移動と座標の対応

もとの曲線 C 上の点を $P(X, Y)$ とする。曲線全体を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動すると、P は $P'(x, y) = (X+p, Y+q)$ へ移る。したがって、移動前の座標は $X = x-p, Y = y-q$ である。
もとの曲線が $F(X, Y) = 0$ なら、移動後の点 (x, y) は

$$F(x-p, y-q) = 0$$

を満たす。右へ p 動かすと式に $x-p$ が現れるのは、現在の座標から移動量を引いて、移動前の座標へ戻しているためである。

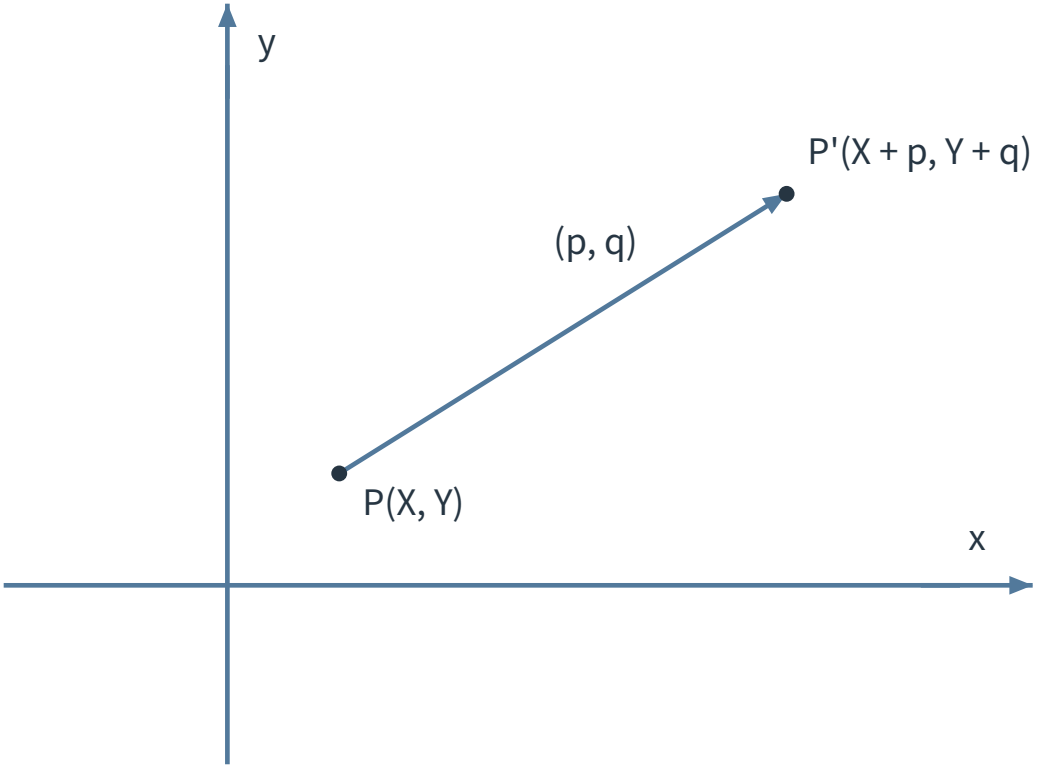

図 1　点 P と平行移動後の点 P'の座標関係

平行移動の代入規則

$F(x,y)=0$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した曲線は $F(x-p,y-q)=0$ である。逆に、$F(x-p,y-q)=0$ は $F(x,y)=0$ を (p,q) だけ平行移動したものと読める。

符号を形だけで覚えない

$(x-3)^2$ は右へ 3、$(y+2)^2=(y-(-2))^2$ は下へ 2 の移動を表す。括弧の内側の符号を反転させて読むだけでなく、中心や頂点で括弧が 0 になることを確認すると誤りを防げる。

例題 1：放物線を平行移動する

放物線 $y^2=8x$ を x 軸方向に 3、y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式、頂点、焦点、準線を求めよ。

例題 1 の解答・解説

x を $x-3$、y を $y-(-2)=y+2$ に置き換えるから、方程式は

$$(y+2)^2=8(x-3)$$

である。$8=4p$ より $p=2$ なので、移動前の頂点 $(0,0)$、焦点 $(2,0)$、準線 $x=-2$ をそれぞれ $(3,-2)$ だけ移す。したがって、頂点は $(3,-2)$、焦点は $(5,-2)$、準線は $x=1$ である。

2. 標準形から位置と特徴を読む

平行移動した二次曲線の標準形

正の定数 a,b と実数 p,q に対して、代表的な標準形は次のとおりである。

- 放物線 $(y-q)^2=4r(x-p)$ の頂点は (p,q)、焦点は $(p+r,q)$、準線は $x=p-r$ である。r の符号が開く向きを決める。
- 楕円 $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ の中心は (p,q) である。焦点は長軸方向へ中心から c だけ離れ、$c^2=|\,a^2-b^2\,|$ である。
- 双曲線 $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ の中心は (p,q)、頂点は $(p\pm a,q)$、焦点は $(p\pm c,q)$ で、$c^2=a^2+b^2$ である。漸近線は $y-q=\pm\frac{b}{a}(x-p)$ である。

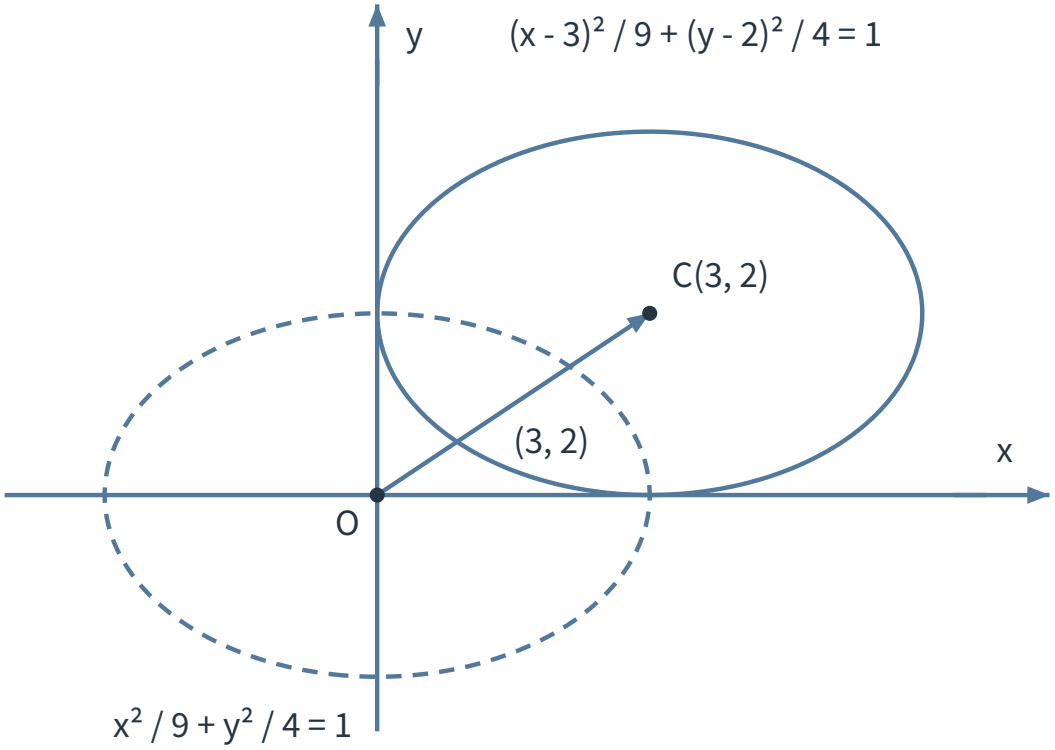

図 2　原点中心の楕円と中心が(3, 2)の楕円

例題 2：楕円の中心と焦点を読む

楕円 $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ の中心、長軸の向き、頂点、焦点を求めよ。

例題 2 の解答・解説

中心は $(-1,2)$ である。$25>9$ なので長軸は x 軸に平行であり、長半径は 5、短半径は 3 である。よって 4 頂点は

$$(-6,2),\ (4,2),\ (-1,-1),\ (-1,5)$$

である。$c^2=25-9=16$ より $c=4$ だから、焦点は $(-1\pm4,2)$、すなわち $(-5,2),(3,2)$ である。

例題 3：双曲線の位置と漸近線を読む

双曲線 $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$ の中心、開く向き、頂点、焦点、漸近線を求めよ。

例題 3 の解答・解説

正の項が $(y+1)^2$ なので上下に開き、中心は $(2,-1)$ である。$a=2, b=3$ より、頂点は $(2,-1\pm 2)$、すなわち $(2,1),(2,-3)$ である。
$c^2=a^2+b^2=4+9=13$ より $c=\sqrt{13}$ なので、焦点は $\left(2,-1\pm\sqrt{13}\right)$ である。縦軸型の漸近線は

$$y+1=\pm\frac{2}{3}(x-2)$$

である。

3. 一般形は平方完成で標準形へ戻す

平方完成は移動量を取り出す操作

二次曲線の方程式が展開されているときは、x と y を別々に平方完成する。たとえば $x^2-6x=(x-3)^2-9$ では、$(x-3)^2$ が中心や頂点の x 座標 3 を示す。定数項を整理した後、右辺を 1 にそろえると、標準形の分母から大きさも読める。

例題 4：一般形を平方完成する

曲線 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ の種類、中心、頂点、焦点を求めよ。

例題 4 の解答・解説

x, y についてそれぞれ平方完成すると、

$$4\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2+4y\right)+4=0$$

$$4\left\{(x-1)^2-1\right\}+9\left\{(y+2)^2-4\right\}+4=0$$

$$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$$

となる。したがって、標準形は $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ であり、中心 $(1,-2)$、長半径 3、短半径 2 の楕円である。
頂点は $(-2,-2),(4,-2),(1,-4),(1,0)$ である。$c^2=9-4=5$ より、焦点は $\left(1\pm\sqrt{5},-2\right)$ である。

右辺と係数を確認する

平方完成の途中で定数を移項した後は、右辺の符号を確かめる。右辺が正なら 1 にそろえて標準形を読む。右辺が 0 または負の場合、点・交わる直線・空集合などの退化した図形になることがあり、放物線・楕円・双曲線の標準形だと即断できない。

4. 演習問題

問題 1：平行移動後の方程式

放物線 $x^2=-12y$ を x 軸方向に -2、y 軸方向に 4 だけ平行移動した曲線の方程式、頂点、焦点、準線を求めよ。

問題 1 の解答・解説

x を $x+2$、y を $y-4$ に置き換えて、$(x+2)^2=-12(y-4)$ である。$-12=4p$ より $p=-3$ なので、頂点は $(-2,4)$、焦点は $(-2,1)$、準線は $y=7$ である。

問題 2：楕円の平行移動

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ を平行移動したところ、中心が $(3,-1)$ になった。移動後の方程式と焦点を求めよ。

問題 2 の解答・解説

移動量は $(3,-1)$ なので、方程式は $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1$ である。$c^2=16-7=9$ より $c=3$ だから、焦点は中心から x 軸方向に 3 離れた $(0,-1),(6,-1)$ である。

問題 3：双曲線の一般形

曲線 $9x^2-4y^2+54x+8y+41=0$ を標準形に直し、中心、頂点、焦点、漸近線を求めよ。

問題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$9(x^2+6x)-4(y^2-2y)+41=0$$

$$9\{(x+3)^2-9\}-4\{(y-1)^2-1\}+41=0$$

$$9(x+3)^2-4(y-1)^2=36$$

である。よって標準形は $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$ であり、中心は $(-3,1)$、頂点は $(-5,1),(-1,1)$ である。$c^2=4+9=13$ より、焦点は $\left(-3\pm\sqrt{13},1\right)$ である。漸近線は $y-1=\pm\frac{3}{2}(x+3)$ である。

問題 4：平行移動を逆にたどる

曲線 $(y-3)^2=20(x+1)$ を、ある放物線 C を平行移動したものと考える。C が原点を頂点にもつとき、C の方程式と平行移動のベクトルを求めよ。また、移動後の焦点と準線を求めよ。

問題 4 の解答・解説

頂点は $(-1,3)$ なので、原点からの平行移動のベクトルは $(-1,3)$ である。括弧を移動前の座標へ戻せば、C は $y^2=20x$ である。
$20=4p$ より $p=5$ だから、移動後の焦点は頂点から右へ 5 の $(4,3)$、準線は $x=-1-5=-6$ である。

問題 5：平方完成と分類

曲線 $x^2-4x-4y^2-8y-4=0$ を標準形に直し、曲線の種類、中心、頂点、焦点、漸近線を求めよ。

問題 5 の解答・解説

平方完成すると、

$$(x-2)^2-4-4\{(y+1)^2-1\}-4=0$$

$$(x-2)^2-4(y+1)^2=4$$

である。したがって、標準形は $\frac{(x-2)^2}{4}-(y+1)^2=1$ であり、左右に開く双曲線である。
中心は $(2,-1)$、頂点は $(0,-1),(4,-1)$ である。$a^2=4, b^2=1$ だから $c=\sqrt{5}$ であり、焦点は $\left(2\pm\sqrt{5},-1\right)$、漸近線は $y+1=\pm\frac{1}{2}(x-2)$ である。