

第 137 講 2 つのグラフで囲まれた面積

学習目標

- 2 曲線の交点を求め、面積を考える区間を決められる。
- 差の符号を調べて上側の曲線と下側の曲線を判定し、縦の長さを式で表せる。
- 上下関係が変化する場合に、区間を分けて面積を求められる。
- 2 つの曲線だけで囲まれた領域と、境界が指定された領域を区別できる。

2 曲線で囲まれた面積の考え方

曲線と x 軸だけで囲まれた有界領域や、2 曲線だけで囲まれた有界領域では、境界となる点はそれぞれの曲線が交わる点になる。

一方で、「 $a \leq x \leq b$ の範囲で求める」のように垂直な境界が指定されている場合は、その指定された区間を使う。この 2 つを区別することが重要である。

実数 $a < b$ について、有限閉区間 $a \leq x \leq b$ で多項式関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ を考え、常に $f(x) \geq g(x)$ であるとする。

このとき、ある x での縦の長さは、

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

で表される。 $h(x) \geq 0$ なので、この縦の長さを区間全体で足し合わせる考え方は、前講 136 で扱った非負の関数の面積と同じである。

したがって、面積 S は、

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

で求められる。

ここで重要なのは、曲線の高さを x 軸からの距離で考えないことである。

例えば、上側の曲線の値が -2 、下側の曲線の値が -5 であっても、縦の長さは

$$(-2) - (-5) = 3$$

であり、面積に加える長さは 3 になる。

また、区間全体の全ての x で $f(x) = g(x)$ なら、縦の長さは常に 0 なので、面積も 0 である。ただし、1 点だけで $f(x) = g(x)$ となる場合は、一般に面積が 0 になるわけではない。

2 曲線で囲まれた面積の定義

実数 a, b が $a < b$ を満たし、多項式関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ を考える。

閉区間 $a \leq x \leq b$ で、必要な垂直境界を含む領域を考える。

この区間で常に $f(x) \geq g(x)$ なら、 $f(x)$ が上側、 $g(x)$ が下側であり、面積は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

で定める。

ただし、区間内で上側と下側が交代する場合は注意が必要である。固定した $f(x) - g(x)$ の符号付き積分 1 つだけでは、正の面積と負の面積が打ち消し合い、総面積にならないことがある。

その場合は、交点などで区間を分け、それぞれの区間で上側-下側を考える。

また、 $f(x)$ と $g(x)$ が同一関数なら、縦の長さは常に 0 であり、面積は 0 である。

面積を求める判断手順

2 曲線で囲まれた面積では、最初に曲線の種類ではなく境界の決まり方を確認する。

同じ関数の場合は高さが常に0なので、面積は0である。

それ以外では、次の順番で考える。

1. 指定された区間があるか、2 曲線だけで囲まれた領域かを確認する。
2. 2 曲線だけで囲まれた領域なら、 $f(x) = g(x)$ を解いて交点を求める。
3. 差 $f(x) - g(x)$ の零点で区切られた各区間について符号を調べる。
4. 各区間で上側-下側の形にして積分する。

1 点を代入した結果だけで、区間全体の符号を決めてはいけない。多項式は連続であり、零点を持たない区間では符号は変化しない。また、因数分解できる場合は各因数の符号から判断できる。

接する交点では、必ず上下が交代するとは限らない。例えば、差が $(x-1)^2$ のような形なら、交点で接するだけで上下は入れ替わらない。

また、最後に全体の定積分の絶対値を取ればよいとは限らない。途中で上下関係が変化すると、符号付きの面積が打ち消し合うためである。

注意

2 曲線で囲まれた面積では、 x 軸との交点を探すのではなく、2 曲線の交点を探す。

また、グラフの見た目だけから面積の大小や値を判断してはいけない。必ず交点と上下関係を式で確認する。

境界が「 $x = a$ から $x = b$ まで」と指定されている問題と、「2 曲線だけで囲まれた領域」を求める問題では、区間の決め方が異なる。前者では指定された区間を使い、後者では交点から区間を決める。

例題 1

$y = x^2$ と $y = 2x$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

2 曲線だけで囲まれた領域なので、まず交点を求める。

$$x^2 = 2x$$

整理すると、

$$x(x-2) = 0$$

より、交点の x 座標は $x = 0, 2$ である。

次に、区間 $0 \leq x \leq 2$ で上下関係を確認する。

差を考えると、

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

である。

$0 < x < 2$ では、差

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

を考える。

区間の内部 $0 < x < 2$ では $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ である。したがって、

$$x(x - 2) < 0$$

となる。

端点 $x = 0, 2$ では差は 0 であり、内部では差が負である。よって、閉区間 $0 \leq x \leq 2$ 全体で、

$$x^2 \leq 2x$$

が成り立つ。

したがって、この区間では $y = x^2$ は $y = 2x$ より下側である。

したがって、高さは

$$2x - x^2$$

となる。

よって面積は、

$$S = \int_0^2 \{2x - x^2\} dx$$

である。

計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は $\frac{4}{3}$ である。

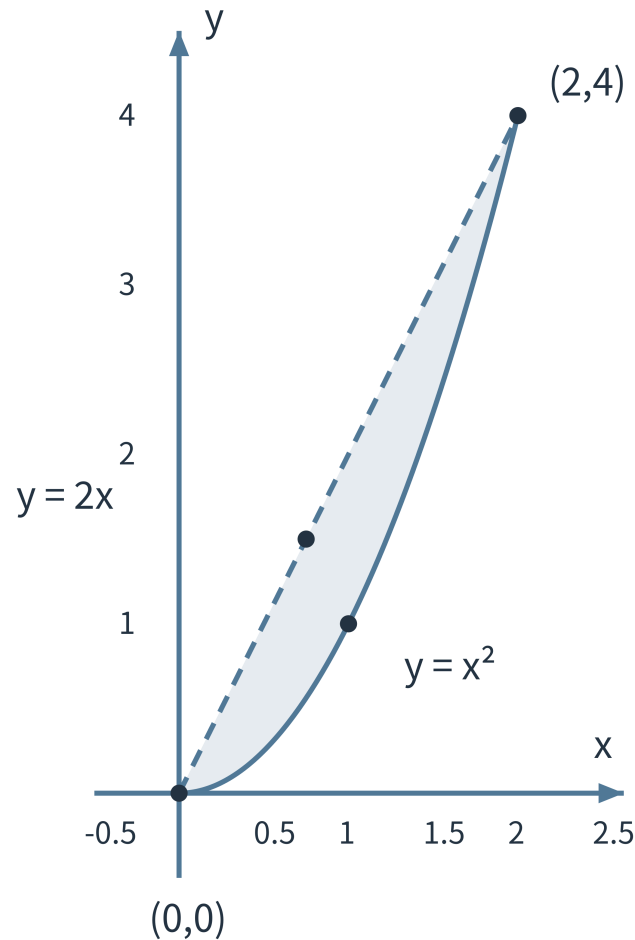


図1 実線 $y = x^2$ と破線 $y = 2x$ が囲む領域を示す。交点は $(0,0)$ 、 $(2,4)$ である。

例題 2

$y = x^2 - 4$ と $y = -x^2 - 2$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

2 曲線の交点を求める。

$$x^2 - 4 = -x^2 - 2$$

整理すると、

$$2x^2 = 2$$

より、

$$x^2 = 1$$

したがって、交点の x 座標は $x = -1, 1$ である。

次に上下関係を確認する。

差を考えると、

$$(x^2 - 4) - (-x^2 - 2) = 2x^2 - 2$$

である。

区間 $-1 < x < 1$ では $x^2 < 1$ なので、

$$2x^2 - 2 < 0$$

となる。

したがって、 $y = x^2 - 4$ が下側、 $y = -x^2 - 2$ が上側である。

両方の曲線は x 軸より下にあるが、面積の高さは上側の値から下側の値を引いて求める。
高さは、

$$(-x^2 - 2) - (x^2 - 4) = 2 - 2x^2$$

である。

よって、

$$S = \int_{-1}^1 \{2 - 2x^2\} dx$$

となる。

計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は $\frac{8}{3}$ である。

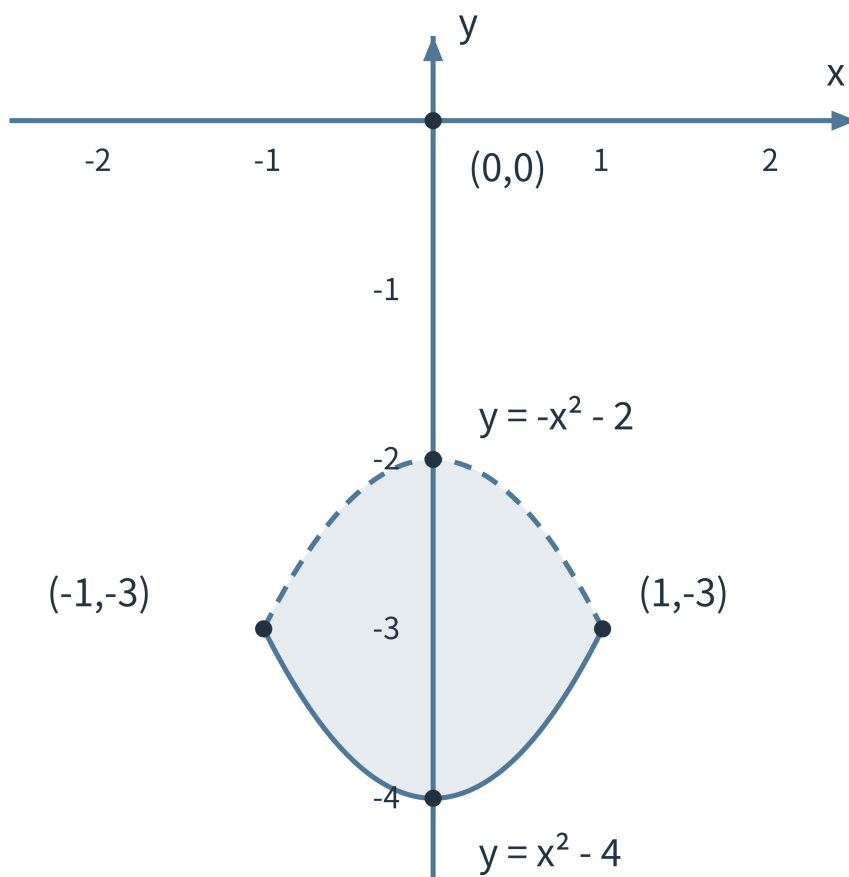


図2 実線 $y = x^2 - 4$ と破線 $y = -x^2 - 2$ が囲む領域を示す。交点は $(-1, -3)$ 、 $(1, -3)$ であり、領域全体が x 軸より下にある。

例題 3

$y = x^3$ と $y = x$ で囲まれた2つの領域の総面積を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

交点を求める。

$$x^3 = x$$

整理すると、

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

より、交点の x 座標は $x = -1, 0, 1$ である。

この3点によって2つの領域に分かれるため、区間を分けて考える。

区間 $-1 < x < 0$ では、差

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

を考える。

この区間では $x < 0$ 、 $x-1 < 0$ 、 $x+1 > 0$ である。したがって、

$$x(x-1)(x+1) > 0$$

となる。

端点 $x = -1, 0$ では差は0であり、内部では常に正である。よって、この区間では $y = x^3$ が上側、 $y = x$ が下側である。

面積は、

$$\int_{-1}^0 \{x^3 - x\} dx$$

である。

区間 $0 < x < 1$ では、差

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

を考える。

この区間では $x > 0$ 、 $x-1 < 0$ 、 $x+1 > 0$ である。したがって、

$$x(x-1)(x+1) < 0$$

となる。

端点 $x = 0, 1$ では差は0であり、内部では常に負である。よって、この区間では $y = x$ が上側、 $y = x^3$ が下側である。

面積は、

$$\int_0^1 \{x - x^3\} dx$$

である。

左右の面積をそれぞれ計算する。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{x^3 - x\} dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{x - x^3\} dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって、総面積は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

したがって、求める総面積は $\frac{1}{2}$ である。

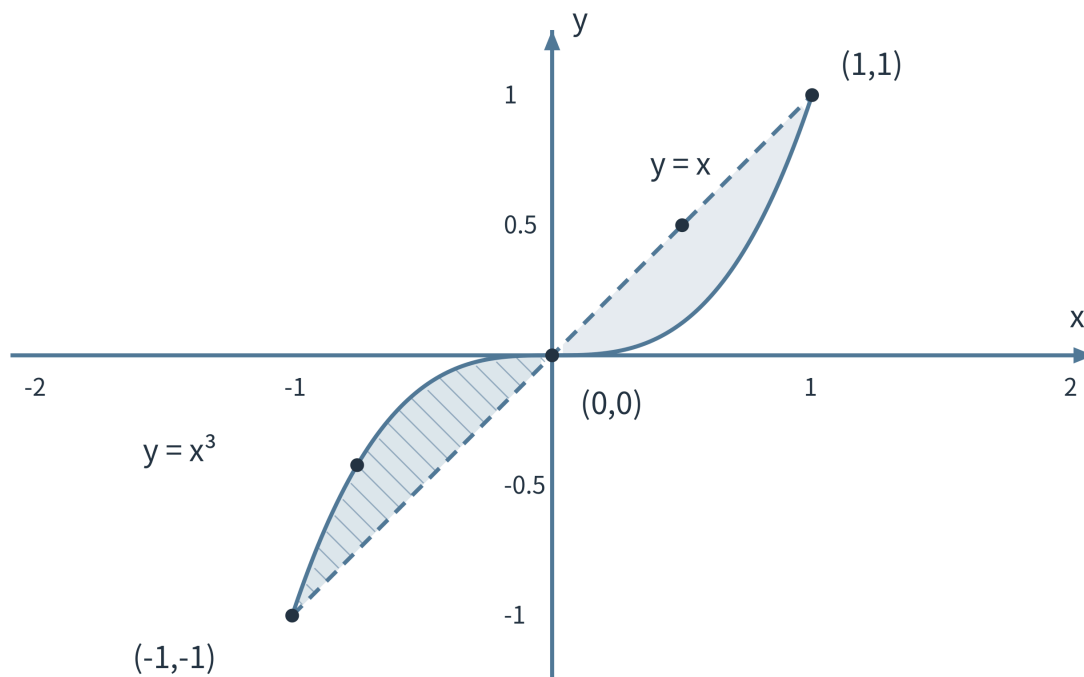


図3 実線 $y = x^3$ と破線 $y = x$ が囲む領域を、 $-1 \leq x \leq 0$ では斜線、 $0 \leq x \leq 1$ では淡い塗りで示す。交点は $(-1, -1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ である。

練習問題 1

$y = x^2$ と $y = 4x$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

練習問題 2

$y = x^2 - 9$ と $y = -x^2 - 1$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

練習問題 3

$y = x^3 + x^2$ と $y = x^2 + x$ で囲まれた 2 つの領域の総面積を求めなさい。

練習問題 4

$y = x^2 - 2x$ と $y = -x^2 + 2x$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

練習問題 5

$y = x^2$ と $y = 2x - 1$ について、 $0 \leq x \leq 3$ の範囲で 2 曲線に挟まれた面積を求めなさい。

練習問題 6

$y = x^2$ 、 $y = x$ 、 $x = 0$ 、 $x = 2$ で囲まれた領域の総面積を求めなさい。また、 $x^2 - x$ をそのまま積分した値の絶対値と比較し、違いを説明しなさい。

練習問題 7

$y = x^2 - 4$ と $y = x^2 - 4$ について、有限区間 $-2 \leq x \leq 3$ で2つの曲線に挟まれた面積を求めなさい。

練習問題 8

$x = 0$ 、 $x = 2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = 2x + 3$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

交点を求める。

$$x^2 = 4x$$

より、

$$x(x - 4) = 0$$

したがって、交点の x 座標は $x = 0, 4$ である。

差を考えると、

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

である。

区間 $0 < x < 4$ では、 $x > 0$ かつ $x - 4 < 0$ なので、

$$x(x - 4) < 0$$

となる。よって、 $y = x^2$ が下側、 $y = 4x$ が上側である。

面積は、

$$S = \int_0^4 \{4x - x^2\} dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \\ &= 32 - \frac{64}{3} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{32}{3}$ である。

練習問題 2 の解答・解説

交点を求める。

$$x^2 - 9 = -x^2 - 1$$

より、

$$2x^2 = 8$$

したがって、

$$x^2 = 4$$

であるから、交点は $x = -2, 2$ である。

差を考える。

$$(x^2 - 9) - (-x^2 - 1) = 2x^2 - 8$$

区間 $-2 < x < 2$ では $x^2 < 4$ なので、

$$2x^2 - 8 < 0$$

となる。

よって、 $y = x^2 - 9$ が下側、 $y = -x^2 - 1$ が上側である。

両方の曲線は x 軸より下側にあるが、高さは上側-下側で考える。

$$S = \int_{-2}^2 \{(-x^2 - 1) - (x^2 - 9)\} dx$$

整理すると、

$$S = \int_{-2}^2 \{8 - 2x^2\} dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \left[8x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \left(16 - \frac{16}{3} \right) - \left(-16 + \frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{64}{3}$ である。

練習問題 3 の解答・解説

2 曲線の交点を求める。

$$x^3 + x^2 = x^2 + x$$

整理すると、

$$x^3 - x = 0$$

となる。

したがって、

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

より、交点の x 座標は $x = -1, 0, 1$ である。

ここで、曲線それぞれの x 軸との交点を調べて区間を決めるのではなく、2 曲線の交点が囲まれた領域の境界になる。

差を考えると、

$$(x^3 + x^2) - (x^2 + x) = x^3 - x$$

となり、共通する x^2 が消えるため、上下関係は $x^3 - x$ の符号で判断できる。

区間 $-1 < x < 0$ では、

$x < 0$ 、 $x - 1 < 0$ 、 $x + 1 > 0$ より、

$$x(x - 1)(x + 1) > 0$$

である。

したがって、この区間では $y = x^3 + x^2$ が上側、 $y = x^2 + x$ が下側である。

面積は、

$$\int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2) - (x^2 + x)\} dx$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

次に、区間 $0 < x < 1$ では、

$x > 0$ 、 $x - 1 < 0$ 、 $x + 1 > 0$ より、

$$x(x - 1)(x + 1) < 0$$

である。

したがって、この区間では $y = x^2 + x$ が上側、 $y = x^3 + x^2$ が下側である。

面積は、

$$\int_0^1 \{(x^2 + x) - (x^3 + x^2)\} dx$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x^3 + x) dx &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

よって、総面積は、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

練習問題 4 の解答・解説

交点を求める。

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x$$

より、

$$2x^2 - 4x = 0$$

したがって、

$$2x(x - 2) = 0$$

であるから、交点は $x = 0, 2$ である。

差を考える。

$$(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 4x$$

区間 $0 < x < 2$ では、

$x > 0$ 、 $x - 2 < 0$ なので、

$$2x(x - 2) < 0$$

となる。

よって、 $y = x^2 - 2x$ が下側である。

面積は、

$$S = \int_0^2 \{(-x^2 + 2x) - (x^2 - 2x)\} dx$$

つまり、

$$S = \int_0^2 \{-2x^2 + 4x\} dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{16}{3} + 8 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{8}{3}$ である。

練習問題 5 の解答・解説

この問題は区間が指定されているため、交点だけで区間を決めない。
指定区間 $0 \leq x \leq 3$ 内で上下関係を確認する。
差を考える。

$$x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

である。

$(x - 1)^2$ は全区間で 0 以上なので、

$$x^2 \geq 2x - 1$$

となる。

したがって、 $y = x^2$ が常に上側である。ただし $x = 1$ では接するだけで、上下は交代しない。
面積は、

$$S = \int_0^3 \{x^2 - (2x - 1)\} dx$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^3 \\ &= 9 - 9 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

したがって、面積は 3 である。

練習問題 6 の解答・解説

境界が $x = 0$ 、 $x = 2$ と指定されているので、この区間内で上下関係を調べる。
差を考える。

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

である。

区間 $0 < x < 1$ では $x > 0$ 、 $x - 1 < 0$ なので、

$$x(x - 1) < 0$$

となる。したがって、この区間では $y = x$ が上側、 $y = x^2$ が下側である。
区間 $1 < x < 2$ では $x > 0$ 、 $x - 1 > 0$ なので、

$$x(x - 1) > 0$$

となる。したがって、この区間では $y = x^2$ が上側、 $y = x$ が下側である。
よって、面積は 2 つの区間に分ける。

左側の面積は、

$$\int_0^1 \{x - x^2\} dx$$

である。

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \{x - x^2\} dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

右側の面積は、

$$\int_1^2 \{x^2 - x\} dx$$

である。

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \{x^2 - x\} dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

したがって、総面積は、

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

である。

一方、差 $x^2 - x$ を区間全体でそのまま積分すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \{x^2 - x\} dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} - 2 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

この場合、差 $x^2 - x$ は区間 $0 < x < 1$ で負、区間 $1 < x < 2$ で正となるため、固定した差をそのまま積分すると左側の寄与が負、右側の寄与が正として計算される。

左側の符号付きの寄与は $-\frac{1}{6}$ 、右側の寄与は $\frac{5}{6}$ であり、これらが打ち消し合った結果、

$$\int_0^2 \{x^2 - x\} dx = \frac{2}{3}$$

となる。

しかし、幾何的な面積そのものは負ではない。各区間で上側-下側を考える必要があり、正しい総面積は、

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

である。

このように、符号の変化が1回の場合でも正負の寄与の打ち消しは起こる。したがって、最後に絶対値を取るだけでは、この場合でも

$$\left| \int_0^2 \{x^2 - x\} dx \right| = \frac{2}{3}$$

となり、総面積1とは一致しない。

したがって、上下関係が変化する場合は、最後に絶対値を取るだけでは一般に総面積を求められない。

練習問題 7 の解答・解説

2つの関数は同じである。

$$y = x^2 - 4$$

であるから、どの x でも2つの曲線の高さは一致する。

縦の長さは、

$$(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0$$

である。

したがって、指定区間 $-2 \leq x \leq 3$ では高さが常に0であり、面積は

$$S = \int_{-2}^3 0 dx$$

となる。

よって、

$$S = 0$$

である。

この問題では同じ曲線を比べているため、通常の意味で異なる2曲線に囲まれた領域は存在しない。しかし、指定された有限区間内の高さを考えると、退化した領域の面積として0を求められる。

練習問題 8 の解答・解説

この問題では、境界が $x = 0$ 、 $x = 2$ と指定されているため、2曲線の交点を区間の端として決め直す必要はない。

ただし、指定された区間でどちらの曲線が上側かは必ず確認する必要がある。そのため、2曲線の差を考え、区間内での符号を調べて上下関係を判断する。

区間 $0 \leq x \leq 2$ で上下関係を確認する。

差を考える。

$$x^2 - (2x + 3) = x^2 - 2x - 3$$

因数分解すると、

$$(x - 3)(x + 1)$$

となる。

区間 $0 \leq x \leq 2$ では $x - 3 < 0$ 、 $x + 1 > 0$ なので、

$$(x - 3)(x + 1) < 0$$

である。

したがって、 $y = x^2$ が下側、 $y = 2x + 3$ が上側である。

面積は、

$$S = \int_0^2 \{2x + 3 - x^2\} dx$$

となる。

$$\begin{aligned} S &= \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= 4 + 6 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

したがって、面積は $\frac{22}{3}$ である。