

第 118 講 指数関数とグラフ

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 指数を実数まで広げた意味を理解し、指数関数 $y = a^x$ の定義と条件を説明できる。
- ・ 指数関数の値域、通る点、漸近線、増減の特徴をグラフと結び付けて理解できる。
- ・ 底 a の大きさによって、指数関数の変化の仕方を判断できる。

指数を実数へ広げる考え方

これまでの指数では、整数や有理数の指数を中心に扱ってきた。しかし、指数関数 $y = a^x$ を実数全体で考えるためには、指数 x を無理数まで広げる必要がある。

正の底 $a > 0$ に対して、無理数 x の値は、有理数 r による近似を用いて考える。 x に近い有理数 r を考えると、それぞれに対して a^r が定まり、その値を連続的につなぐことで a^x を拡張する。

この実数指数への拡張では、厳密な構成方法や、その値が一意に定まることの証明までは本講では扱わない。

以後は、実数全体で指数関数が連続的に変化することと、拡張された指数法則が成り立つことを利用する。

指数関数の定義

a を正の実数とする。関数

$y = a^x$ を指数関数という。ただし、本講で扱う指数関数では $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする。

$a = 1$ の場合は $y = 1$ という定数関数になり、指数による変化を表さないため除く。

また、 $a = 0$ や負の a では、すべての実数 x に対して同じ実数値を定めることができないため、指数関数の底として扱わない。

指数関数のグラフを見る視点

指数関数の変化は、「一定量を足す」変化ではなく、「一定の倍率を掛ける」変化である。

例えば $y = 2^x$ では、 x が 1 増えると値は 2 倍になる。

一般に、 $h > 0$ のとき

$$\frac{a^{x+h}}{a^x} = a^h \text{ である。}$$

つまり、 x が同じだけ増えると、値は常に同じ倍率で変化する。この倍率が 1 より大きいのか、1 より小さいかによってグラフの向きが決まる。

表にしたいいくつかの点だけを直線で結ぶのではない。指数関数は、実数全体の各点で値をもつ滑らかな曲線であり、表の点はその特徴を確認するための代表点である。

指数関数 $y = a^x$ の基本的な特徴

指数関数 $y = a^x$ は、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ を満たす底 a に対して定義される。

定義域はすべての実数である。

また、指数関数は実数全体で連続的に変化する。さらに、底によって近づく向きは異なる。

$a > 1$ の場合、 x を負の方向へ限りなく大きくすると a^x は 0 へ近づき、 x を正の方向へ限りなく大きくすると上限なく大きな値をとる。

$0 < a < 1$ の場合は逆であり、 x を正の方向へ限りなく大きくすると a^x は 0 へ近づき、 x を負の方向へ限りなく大きくすると上限なく大きな値をとる。

この連続的な変化と両端での振る舞いから、指数関数の値域はすべての正の実数となる。

また、 $a^0 = 1$ であるため、必ず点 $(0, 1)$ を通る。

さらに、 a^x はどのような有限の x に対しても正であるため、有限の位置で $y = 0$ になることはない。なお、グラフに表示されている左右の端は表示範囲の限界であり、定義域の端を表しているわけではない。指数関数の定義域はあくまですべての実数である。

漸近線

漸近線とは、グラフが限りなく近づく直線のことである。

特に水平漸近線については、 x が正または負の方向へ限りなく進むとき、グラフとその直線との距離が 0 へ近づくものを考える。

一般の漸近線は、グラフが近づく直線であり、定義として「絶対に交わらない」とは限らない。

指数関数では、横軸 $y = 0$ が水平漸近線になる。

$a > 1$ の場合、 x が負の方向へ限りなく進むとき a^x は 0 へ近づく。

$0 < a < 1$ の場合、 x が正の方向へ限りなく進むとき a^x は 0 へ近づく。

ただし、指数関数では常に $a^x > 0$ が成り立つため、横軸と交わらない。このことは、漸近線の一般的な定義とは別に、指数関数自身の性質から説明される。

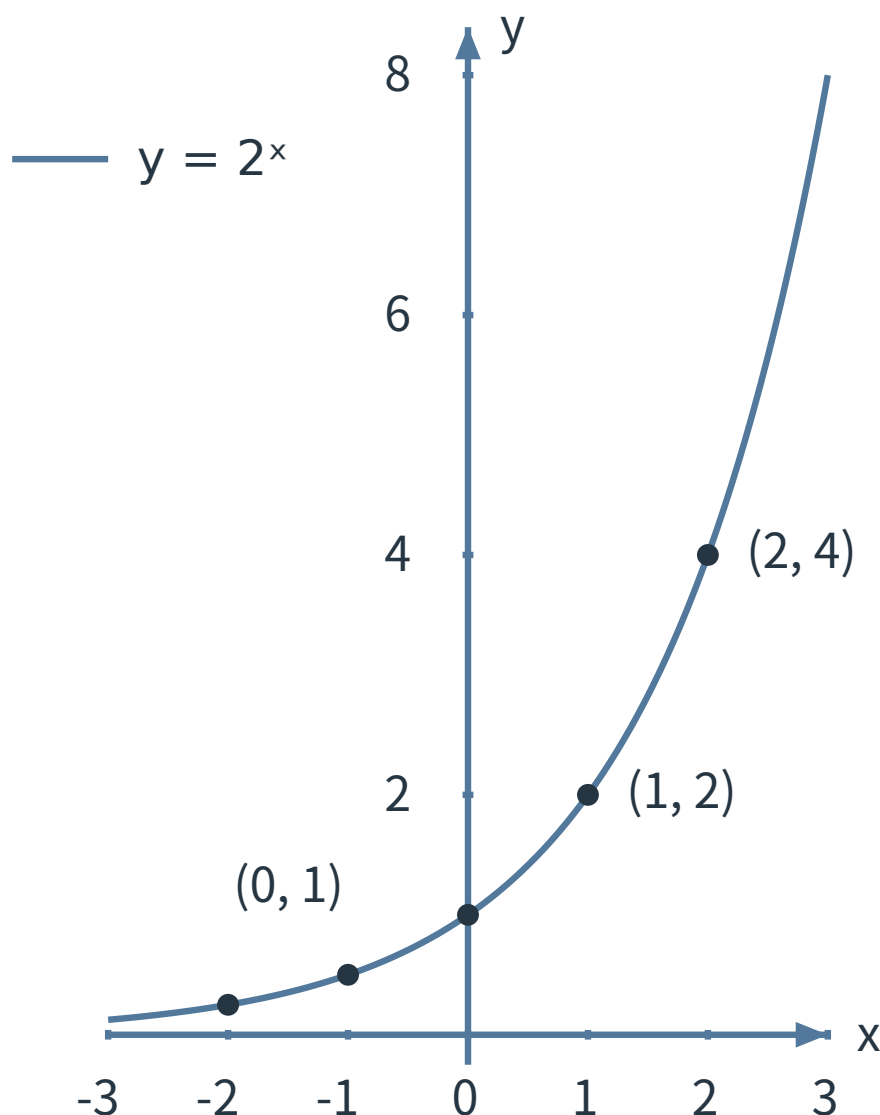


図1 代表点： $(-2, \frac{1}{4})$ 、 $(-1, \frac{1}{2})$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 8)$ 。黒丸は表示範囲の内側の代表点。定義域は実数全体で、図はその一部を示す。

底による増加と減少の違い

指数関数の変化は、 x が同じ幅だけ増えたときに一定倍率で変化することに特徴がある。

任意の $h > 0$ に対して、 $\frac{a^{x+h}}{a^x} = a^h$ である。

この倍率は x によらず一定である。

$a > 1$ の場合、 $a^h > 1$ なので、 x がどの位置であっても、同じ幅だけ増えると値は大きくなる。したがって、 $y = a^x$ は実数全体で厳密増加する。

一方、 $0 < a < 1$ の場合、 $0 < a^h < 1$ なので、同じ幅だけ増えると値は小さくなる。したがって、 $y = a^x$ は実数全体で厳密減少する。

1 刻みでいくつかの値を調べることは特徴を確認する方法の 1 つであるが、それだけで実数全体の増減を証明したことにはならない。全実数での性質は、一定倍率の関係から判断する。

また、 $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ である。

したがって、 $y = (\frac{1}{2})^x$ は $y = 2^x$ の指数の符号を反転した関数である。座標で見ると、点 (x, y) が $(-x, y)$ へ移るため、2つのグラフは y 軸について対称である。

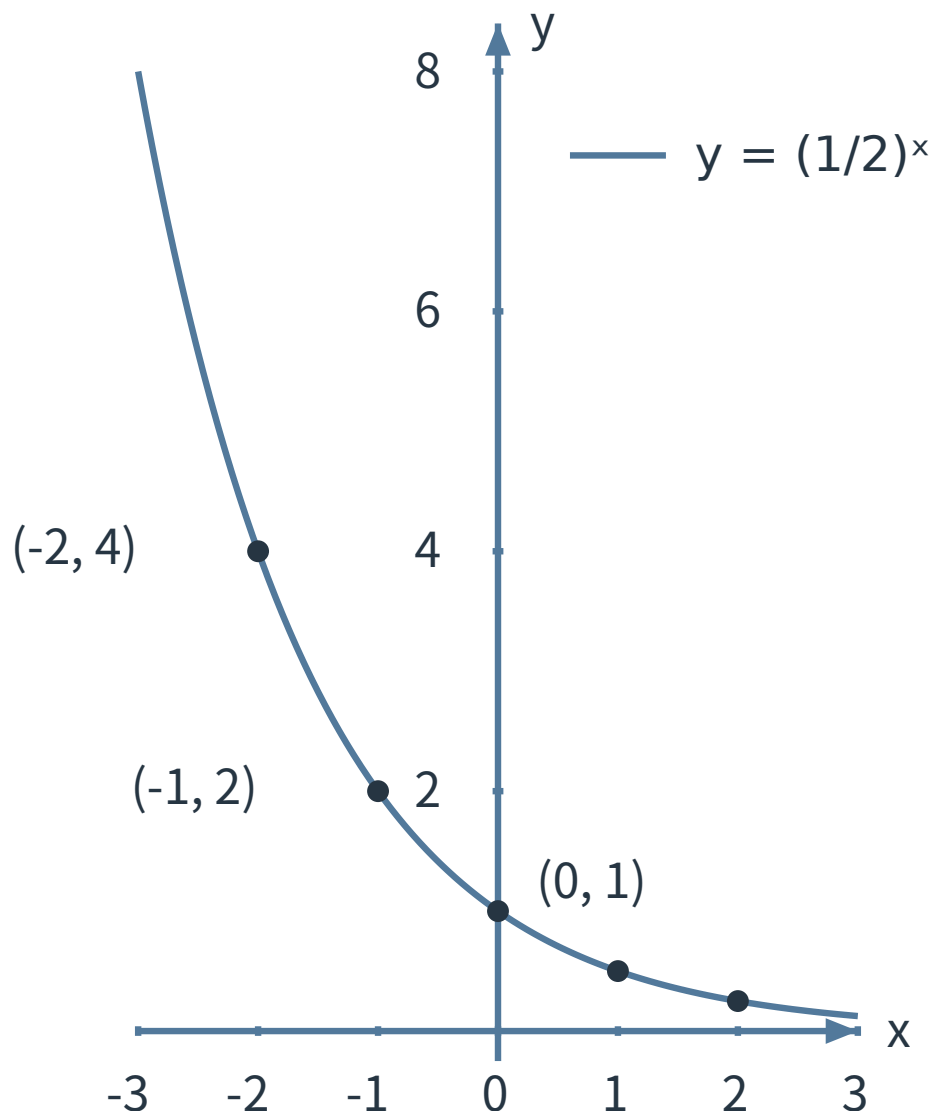


図2 代表点： $(-3, 8)$ 、 $(-2, 4)$ 、 $(-1, 2)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, \frac{1}{2})$ 、 $(2, \frac{1}{4})$ 。黒丸は表示範囲の内側の代表点。定義域は実数全体で、図はその一部を示す。

底が大きい指数関数との比較

$y = 2^x$ と $y = 3^x$ を比較するときは、値を一部だけ表にするのではなく、比を考える。

$\frac{3^x}{2^x} = (\frac{3}{2})^x$ である。

ここで、 $\frac{3}{2} > 1$ なので、 $(\frac{3}{2})^x$ は厳密増加する。

したがって、 $x > 0$ のとき

$(\frac{3}{2})^x > 1$ であり、 $3^x > 2^x$ となる。

$x = 0$ のときは、 $(\frac{3}{2})^0 = 1$ なので、 $3^0 = 2^0 = 1$ となる。

$x < 0$ のときは、 $0 < (\frac{3}{2})^x < 1$ なので、 $3^x < 2^x$ となる。

また、 $2^x > 0$ であるため、この大小関係はそのまま2つの曲線の上下関係を表す。

したがって、2つの指数関数は $(0, 1)$ を共通点としてもち、 $x = 0$ の左右で上下関係が入れ替わる。

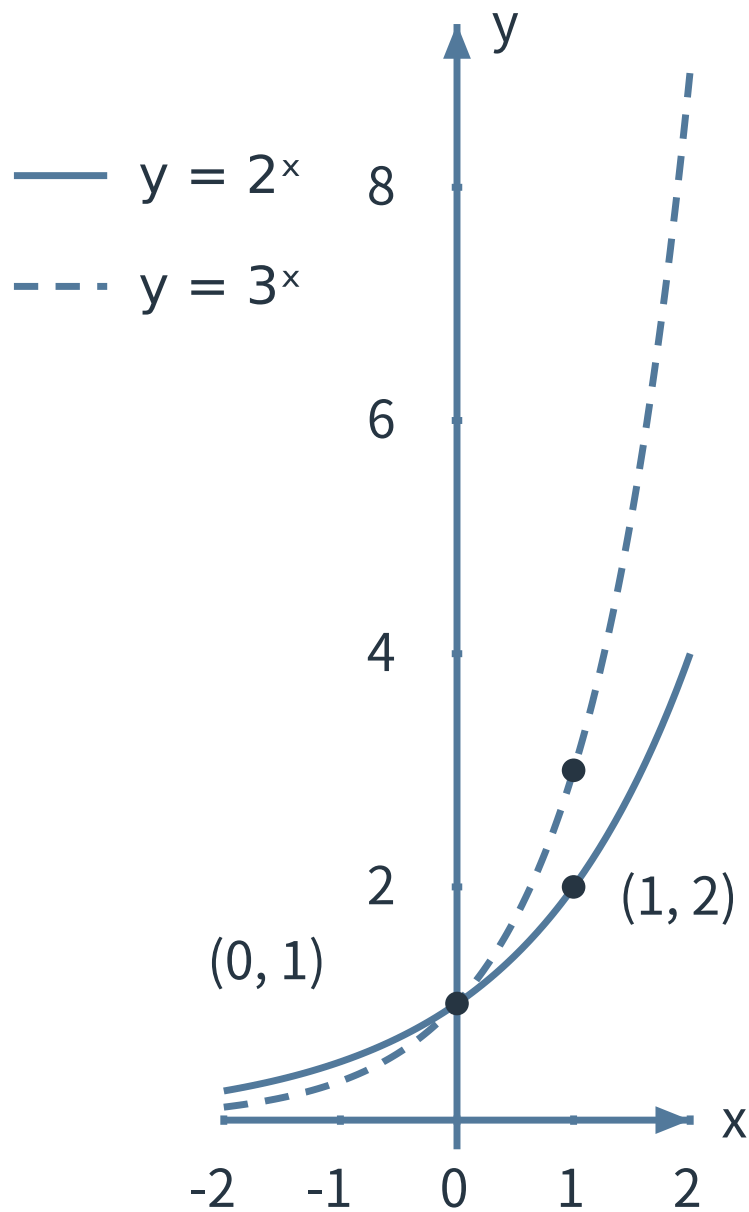


図3 実線 $y = 2^x$: $(-1, \frac{1}{2})$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 。破線 $y = 3^x$: $(-1, \frac{1}{3})$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 9)$ 。共通点は $(0, 1)$ 。定義域はいずれも実数全体で、図はその一部を示す。

指数関数で確認するポイント

指数関数 $y = a^x$ を見るときは、次の順に確認するとよい。

1. 底 a が 1 より大きいのか、0 と 1 の間かを見る。
2. $(0, 1)$ を通ることを確認する。
3. 値域が $y > 0$ であることを確認する。
4. 横軸 $y = 0$ が漸近線であることを確認する。
5. x が増えたとき、値が一定倍率で変化することを見る。

注意

指数関数のグラフでは、代表点を結んだ折れ線として考えてはいけない。

また、横軸と交わらない理由は「図で交わっていないから」ではなく、 a^x が常に正であるという性質による。

さらに、 $a = 1$ の場合は増加も減少もしないため、本講で定義する指数関数には含めない。

例題 1

$y = 2^x$ について、 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ のときの値を求めなさい。また、定義域・値域・横軸との交点の有無を説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

$y = 2^x$ にそれぞれの値を代入する。

$$x = -2 : y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$x = -1 : y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 : y = 2^0 = 1$$

$$x = 1 : y = 2^1 = 2$$

$$x = 2 : y = 2^2 = 4$$

したがって、対応する点は $(-2, \frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$ である。

指数関数 $y = 2^x$ は x を実数全体で動かせるため、定義域はすべての実数である。

$y = 2^x$ について、値域を考える。

2^x は常に正である。しかし、正であることだけでは、値域がすべての正の実数になることは示せない。

指数関数は実数全体で連続的に変化し、 x を負の方向へ限りなく大きくすると 0 へ近づき、 x を正の方向へ限りなく大きくすると上限なく大きな値をとる。

したがって、連続的な変化によってすべての正の実数を取り、値域は $y > 0$ である。

横軸との交点について考える。横軸は $y = 0$ であるが、 2^x はどのような有限の x でも 0 にならない。

したがって、横軸とは交わらない。

例題 2

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ について、 $x = -\frac{1}{2}$ のときの値と $x = \frac{2}{3}$ のときの値のどちらが大きいかを判断し、理由を説明しなさい。

例題 2 の解答・解説

底は $0 < \frac{1}{2} < 1$ であるため、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は厳密減少する。

指数を比較すると、 $-\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ である。

減少関数では、入力が大きくなるほど値は小さくなるため、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ となる。

実際に値を求めると、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ であり、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ である。

したがって、 $x = -\frac{1}{2}$ のときの値の方が大きい。

例題 3

$y = 2^x$ と $y = 3^x$ について、 $x = -1, 0, 1$ のときの値を比較しなさい。また、 $x < 0$ 、 $x = 0$ 、 $x > 0$ の各範囲で、どちらの曲線が上にあるか説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

それぞれの値を調べる。

$x = -1$ のとき、 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ 、 $3^{-1} = \frac{1}{3}$ なので、 $2^{-1} > 3^{-1}$ である。

$x = 0$ のときは、 $2^0 = 3^0 = 1$ となる。

$x = 1$ のときは、 $2^1 = 2$ 、 $3^1 = 3$ なので、 $2^1 < 3^1$ である。

2 つの指数関数の大小を全実数で比較するために、比を考える。

$\frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ である。

$\frac{3}{2} > 1$ なので、 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ は厳密増加する。

したがって、 $x < 0$ のとき、 $0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1$ であるから、 $3^x < 2^x$ となる。

$x = 0$ のときは、 $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ なので、 $3^0 = 2^0$ となる。

$x > 0$ のときは、 $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ であるから、 $3^x > 2^x$ となる。

また、 $2^x > 0$ なので、この大小関係はそのままグラフの上下関係を示す。

したがって、 $x < 0$ では $y = 2^x$ が上、 $x = 0$ では一致し、 $x > 0$ では $y = 3^x$ が上にある。

演習問題**演習番号 1**

指数関数 $y = a^x$ が定義されるための底 a の条件を答えなさい。また、その条件が必要な理由を説明しなさい。

演習番号 2

指数関数 $y = 5^x$ について、定義域と値域を答えなさい。また、グラフが必ず通る点を答え、その理由を説明しなさい。

演習番号 3

次の指数関数の増減を答えなさい。

(1) $y = 4^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

また、底の条件と増減の関係を説明しなさい。

演習番号 4

関数 $y = 2^x$ について、 x が h だけ増加したときの値の倍率を求めなさい。ただし、 $h > 0$ とする。

また、 x の増加量が同じならば、どの位置でも同じ倍率になる理由を説明しなさい。

演習番号 5

次の説明の正誤を答え、誤っている場合は正しい説明を書きなさい。

「 3^x は x を負の方向へ進めると 0 へ限りなく近づくので、十分小さい有限の x を選べば $3^x = 0$ になる。」

演習番号 6

関数 $y = 2^x$ と $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の関係を説明しなさい。

また、2 つのグラフがどのような対称性をもつか答えなさい。

演習番号 7

$y = 2^x$ と $y = 4^x$ を比較する。

(1) $x > 0$ の範囲では、どちらの曲線が上にあるか。

(2) $x < 0$ の範囲では、どちらの曲線が上にあるか。

理由を、1 つ刻みの表だけではなく指数関数の増減の性質を用いて説明しなさい。

演習番号 8

次の説明の誤りを指摘し、正しい説明を書きなさい。

「指数関数 $y = a^x$ は、値が正なので必ずすべての正の実数の値をとる。また、横軸は指数関数の漸近線なので絶対に交わらない。」

演習問題の解答・解説

演習番号 1 の解答・解説

指数関数 $y = a^x$ の底の条件は、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ である。

a が正である必要があるのは、負の底ではすべての実数指数に対して実数値を定められないためである。

例えば、負の数の平方根のように実数にならない場合があり、指数関数として実数全体を扱うことができない。

また、 $a = 0$ の場合も、負の指数を考えると逆数の形で分母が 0 になり、実数値を定められない。

さらに、 $a = 1$ の場合は、 $y = 1^x = 1$ となる定数関数であり、指数による変化を表さない。そのため、本講で扱う指数関数の定義から除く。

したがって、指数関数の条件は $a > 0$ かつ $a \neq 1$ である。

演習番号 2 の解答・解説

$y = 5^x$ は指数関数であり、底は $5 > 1$ を満たす。

指数 x はすべての実数をとることができるため、定義域はすべての実数である。

また、 $5^0 = 1$ なので、グラフは必ず点 $(0, 1)$ を通る。

値域について、 5^x が常に正であることだけでは、すべての正の値をとることは示せない。

指数関数は実数全体で連続的に変化する。また、 $5 > 1$ なので、 x を負の方向へ限りなく進めると 5^x は 0 へ近づき、 x を正の方向へ限りなく進めると上限なく大きな値をとる。

したがって、連続的な変化と両端での振る舞いから、値域は $y > 0$ である。

演習番号 3 の解答・解説

指数関数の増減は、底によって決まる。

(1) $y = 4^x$ について考える。

任意の固定した $h > 0$ に対して、 $\frac{4^{x+h}}{4^x} = 4^h$ となる。

$4 > 1$ なので、 $4^h > 1$ である。

したがって、 x が同じ幅 h だけ増えると、値は必ず 1 より大きい倍率で増える。よって、 $y = 4^x$ は実数全体で厳密増加する。

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ について考える。

任意の固定した $h > 0$ に対して、 $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+h}}{\left(\frac{1}{3}\right)^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^h$ となる。

また、 $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^h < 1$ である。

したがって、 x が同じ幅 h だけ増えると、値は必ず小さくなる。よって、 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は実数全体で厳密減少する。

ここで重要なのは、1 刻みの値を調べた結果ではなく、任意の固定した増分 $h > 0$ に対する倍率の性質から全実数での増減を判断していることである。

演習番号 4 の解答・解説

$y = 2^x$ について、 x が h 増えると、 $\frac{2^{x+h}}{2^x} = \frac{2^x 2^h}{2^x} = 2^h$ となる。

したがって、倍率は 2^h である。

この値は x を含まないため、どの位置の x から始めても同じ倍率になる。

指数関数の特徴は、一定量を足す変化ではなく、一定倍率を掛ける変化である。

演習番号 5 の解答・解説

文は誤りである。

指数関数 $y = 3^x$ では、すべての実数 x に対して $3^x > 0$ である。

そのため、有限の x で $y = 0$ になることはない。

ただし、 x を非常に小さくすると、 3^x は 0 に限りなく近づく。

ここで注意すべき点は、「0 に近づくこと」と「0 になること」は異なるということである。

演習番号 6 の解答・解説

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ を変形すると、 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ である。

したがって、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は、 $y = 2^x$ で x を $-x$ に置き換えた関数である。

これは、グラフを y 軸について対称移動した関係を表す。

また、どちらも $(0, 1)$ を通る。

$y = 2^x$ は右上がり、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は右下がりになる。

演習番号 7 の解答・解説

底を比較する。

4^x は $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ である。

(1) $x > 0$ の場合、 $2x > x$ であり、 $y = 2^t$ は増加関数なので、 $2^{2x} > 2^x$ となる。

したがって、 $y = 4^x$ の方が上にある。

(2) $x < 0$ の場合は指数の大小が逆になる。

例えば $x = -r$ ($r > 0$) とおくと、 $2^x = \frac{1}{2^r}$ であり、 $4^x = \frac{1}{4^r}$ となる。

分母が大きい方が値は小さいため、 $4^x < 2^x$ である。

したがって、 $x < 0$ では $y = 2^x$ の方が上にある。

表で一部の点を見るだけでなく、指数関数全体の増減から判断することが重要である。

演習番号 8 の解答・解説

説明には 2 つの誤りがある。

1 つ目は、「値が正なので必ずすべての正の実数の値をとる」という部分である。

指数関数 $y = a^x$ では、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、 a^x は常に正である。しかし、値が正であることだけでは、値域がすべての正の実数になることは示せない。

値域を考えるには、実数全体で連続的に変化することと、両端での振る舞いを見る必要がある。

$a > 1$ の場合、 x を負の方向へ限りなく進めると a^x は 0 へ近づき、 x を正の方向へ限りなく進めると上限なく大きな値をとる。

$0 < a < 1$ の場合は逆であり、 x を正の方向へ限りなく進めると a^x は 0 へ近づき、 x を負の方向へ限りなく進めると上限なく大きな値をとる。

したがって、連続的な変化と両端での振る舞いから、指数関数の値域はすべての正の実数となる。

2 つ目は、「横軸は指数関数の漸近線なので絶対に交わらない」という部分である。

一般に、漸近線はグラフが限りなく近づく直線であり、定義としてグラフと絶対に交わらないことを要求しない。

指数関数の場合に横軸 $y = 0$ と交わらない理由は、漸近線の定義ではなく、 $a^x > 0$ が常に成り立つためである。

したがって、正しい説明は次のようになる。

「指数関数 $y = a^x$ は、 $a > 1$ の場合は x を負の方向へ進めると 0 へ近づき、正の方向へ進めると上限なく大きくなる。 $0 < a < 1$ の場合はその向きが逆になる。実数全体で連続的に変化するため値域はすべての正の実数である。また、横軸 $y = 0$ は漸近線であり、さらに $a^x > 0$ であることから横軸とは交わらない。」