

第 89 講 高次方程式

学習目標

- ・ 高次方程式を因数分解し、一次方程式や二次方程式へ分けて解けることが目標である。
- ・ 因数定理を使って一次因子を見つけ、残った多項式の次数を下げられることが目標である。
- ・ 実数解と複素数解を漏れなく求めることが目標である。

高次方程式をどう解くか

x^3 や x^4 などを含む方程式を、高次方程式という。

たとえば、

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

のような三次方程式である。

二次方程式には解の公式があるが、高次方程式では、まず式を因数分解して次数を下げるのが基本である。

たとえば左辺が

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

と因数分解できれば、

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$$

である。

積が 0 になるには、少なくとも 1 つの因数が 0 になればよい。したがって、

$$x - 1 = 0, x - 3 = 0, x + 2 = 0$$

をそれぞれ解けばよいので、解は $x = 1, 3, -2$ である。

高次方程式では、「高い次数の式をそのまま解こうとする」のではなく、「一次式や二次式の積へ分ける」という見方が中心となる。

因数分解の方法を判断する順序

高次方程式では、次の順序で左辺を見ると方針を立てやすい。

1. 共通因数や既知の因数分解公式が使えるかを見る。
2. 項をまとめることで共通の因数が現れないかを見る。
3. 三次式などで因数が見えない場合は、因数定理を使って一次因子を探す。
4. 一次因子が見つかったら、多項式の除法によって次数を下げる。
5. 残った二次式などをさらに因数分解するか、二次方程式として解く。
6. 得られたすべての因子について、因子が 0 となる値を求める。

因数を 1 つ見つけても終わりではない。次数を下げ、すべての因子を調べる。

因数定理から一次因子を見つける

多項式を $P(x)$ とする。

前講で学んだ因数定理より、 $P(a) = 0$ ならば、 $P(x)$ は $x - a$ を因数にもつ。

たとえば、

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

とする。

整数を代入して調べると、

$$\begin{aligned}P(1) &= 1 - 2 - 5 + 6 \\&= 0\end{aligned}$$

である。

したがって、 $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

そこで $P(x)$ を $x - 1$ で割ると、

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

となる。

さらに、

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

であるから、

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

まで分解できる。

このように、因数定理は「解を 1 つ見つけるため」だけではなく、「多項式の次数を 1 つ下げる入口」として使うことが重要である。

解の漏れに注意する

高次方程式では、一次因子を 1 つ見つけたところで計算を終えてはいけない。

たとえば、

$$(x - 2)(x^2 + 5) = 0$$

であれば、 $x = 2$ だけが解ではない。

$x^2 + 5 = 0$ から、

$$x^2 = -5$$

であるため、 $i^2 = -1$ を用いると $x = \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$ も解である。

したがって、解は $x = 2, \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$ である。

因数分解した後は、すべての因数について方程式を解く必要がある。

例題

例題 1

次の方程式を解け。

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

例題 1 の解答・解説

左辺を $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とする。

整数を代入して一次因子を探す。

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - 2 - 5 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、因数定理より $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x - 1$ で割ると、

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

である。

二次式をさらに因数分解すると、

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

である。

したがって、

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$$

となる。

それぞれの因数を 0 とすると、解は $x = 1, 3, -2$ である。

例題 2

次の方程式を解け。

$$2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$$

例題 2 の解答・解説

項を前半と後半に分けると、

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 8x - 4 &= x^2(2x + 1) - 4(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x^2 - 4) \\ &= (2x + 1)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(2x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

である。

それぞれの因数を 0 とすると、解は $x = -\frac{1}{2}, 2, -2$ である。

この問題では、因数定理を使う前に項をまとめると共通因数が現れる。高次方程式では、最初から代入を試すのではなく、通常因数分解ができないかを先に確認することが大切である。

例題 3

次の方程式を解け。

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

例題 3 の解答・解説

項をまとめると、

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 + x - 1 &= x^2(x - 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + 1)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

である。

一次因子から $x = 1$ を得る。

また、

$$x^2 + 1 = 0$$

から $x^2 = -1$ であるため、 $x = i, -i$ である。

したがって、解は $x = 1, i, -i$ である。

二次因子が実数の範囲で因数分解できなくても、そこで止めてはいけない。複素数まで含めて二次方程式を解く必要がある。

演習問題

演習問題 1

次の方程式を解け。

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

演習問題 2

次の方程式を解け。

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

演習問題 3

次の方程式を解け。

$$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$$

演習問題 4

次の方程式を解け。

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = 0$$

演習問題 5

次の方程式を解け。

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

演習問題 6

次の方程式を解け。

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

演習問題 7

次の方程式を解け。

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$$

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

左辺を項ごとにまとめると、

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x - 4) - (x - 4) \\&= (x - 4)(x^2 - 1) \\&= (x - 4)(x - 1)(x + 1)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(x - 4)(x - 1)(x + 1) = 0$$

であるから、解は $x = 4, 1, -1$ である。

演習問題 2 の解答・解説

前半と後半に分けると、

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\&= (x + 3)(x^2 - 4) \\&= (x + 3)(x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

であるから、解は $x = -3, 2, -2$ である。

演習問題 3 の解答・解説

項をまとめると、

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 &= x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) \\&= (2x - 3)(x^2 - 4) \\&= (2x - 3)(x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(2x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

である。

$2x - 3 = 0$ から $x = \frac{3}{2}$ であり、ほかの因数から $x = 2, -2$ を得る。

したがって、解は $x = \frac{3}{2}, 2, -2$ である。

演習問題 4 の解答・解説

左辺をまとめると、

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 + 5x - 10 &= x^2(x - 2) + 5(x - 2) \\&= (x - 2)(x^2 + 5)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(x - 2)(x^2 + 5) = 0$$

である。

一次因子から $x = 2$ を得る。

また、

$$x^2 + 5 = 0$$

から、

$$x^2 = -5$$

であるため、 $x = \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$ である。

したがって、解は $x = 2, \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$ である。

演習問題 5 の解答・解説

x^2 を 1 つのまとまりとして見る。

積が 36、和が -13 になる 2 数は -4 と -9 であるから、

$$\begin{aligned}x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\&= (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)\end{aligned}$$

となる。

したがって、解は $x = 2, -2, 3, -3$ である。

四次方程式でも、 x^4 と x^2 と定数だけからなる形では、 x^2 を 1 つの文字のように見ると二次式と同じ考え方で因数分解できる。

演習問題 6 の解答・解説

左辺を $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ とする。

$x = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + 1 - 7 - 1 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

したがって、因数定理より $x - 1$ を因数にもつ。

割り算をすると、

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$

となる。

残った三次式を $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ とする。

$x = -1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} Q(-1) &= -1 + 2 + 5 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $Q(x)$ は $x + 1$ を因数にもつ。

さらに割り算をすると、

$$Q(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

である。

二次式は、

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

と因数分解できる。

したがって、

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x - 2)$$

である。

よって、解は $x = 1, -1, -3, 2$ である。

多項式の除法では、得られた商を展開して元の式に戻るかを確認すると計算ミスを見つけやすい。

演習問題 7 の解答・解説

x^2 を 1 つのまとまりとして見ると、

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

となる。

したがって、

$$(x^2 + 1)(x^2 + 4) = 0$$

である。

$x^2 + 1 = 0$ から $x = i, -i$ を得る。

また、 $x^2 + 4 = 0$ から $x^2 = -4$ であるため、 $x = 2i, -2i$ を得る。

したがって、解は $x = i, -i, 2i, -2i$ である。