

第 127 講 導関数

学習目標

この講では、1 点での変化の割合である微分係数を、位置を表す変数 x の関数としてまとめた導関数を理解することが目標である。

学習後は、次のことができるようになる。

- $f'(x)$ と特定の点での微分係数 $f'(a)$ の違いを説明できる。
- 定義から x^2 の導関数を求めることができる。
- 基本的な多項式の導関数を、定数倍・和差の公式を使って求めることができる。
- 符号を持つ変化の割合である傾きを理解し、関数の値と区別できる。

微分係数から導関数へ

前講では、決まった位置 $x = a$ における変化の割合を考えた。ここでは、位置を表す x を固定せず、それぞれの位置での変化の割合をまとめて扱う。

関数 $y = f(x)$ において、ある位置 x を固定すると、その点での微分係数は増加量 h を用いて次のように表される。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この差分商では $h \neq 0$ とする。 h は正と負の両方の側から 0 へ近づき、両側近傍で同じ有限の極限值が存在するとき、その位置での微分係数が定まる。

導関数を考えるときは、まずある位置 x を固定して $h \rightarrow 0$ の極限を計算する。その結果得られた値を、位置 x の関数としてまとめたものが導関数 $f'(x)$ である。

つまり、微分係数は 1 つの位置に対応する傾きであり、導関数は各位置に対応する傾きを集めた関数である。

導関数が表すもの

導関数は、元の関数の高さを表すものではなく、その場所での変化の割合を表すものである。

例えば $y = x^2$ では、 $x = -1, 0, 1$ における関数の値はそれぞれ $1, 0, 1$ である。しかし、その点での傾きは異なる。

$y = x^2$ の導関数は $y = 2x$ となるため、 $x = -1$ では傾き -2 、 $x = 0$ では傾き 0 、 $x = 1$ では傾き 2 になる。

このように、元の関数の各点における傾きを別の関数として表したものが導関数である。

導関数

関数 $y = f(x)$ に対して、各位置 x で

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在し、その値が有限であるとき、その値を対応させる関数を $f(x)$ の導関数という。

この極限を計算するときは、位置を表す x を固定し、増加量 h を 0 へ近づける。 $h \neq 0$ であり、正の側と負の側の両方から近づけたときに同じ有限の値になる位置だけで導関数が定義される。

特定の値 $x = a$ を代入した $f'(a)$ は、導関数の値であり、点 $x = a$ における微分係数を表す。

したがって、 $f'(x)$ は変化の割合を表す関数、 $f'(a)$ はその関数に a を代入して得られる 1 つの値である。

基本的な導関数の公式

$\frac{d}{dx}$ は、変数 x について微分することを表す記号である。

まず、定数関数 $f(x) = c$ を考える。 c は x によらない定数なので、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

次に $f(x) = x$ の場合は、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{x+h-x}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるため、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

x^2 については、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

であり、 $h \rightarrow 0$ とすると、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

x^3 についても、 $h \neq 0$ の差分商を計算すると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

となる。よって、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

一般に、正整数 $n \geq 2$ については、差のべきの因数分解を利用できる。

$x \neq 0$ のとき、次のように計算する。

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^{n-1} + x^{n-2}(x+h) + \cdots + (x+h)^{n-1}$$

$h \rightarrow 0$ とすると、右辺の各項は x^{n-1} に近づくため、 n 個の項の和は nx^{n-1} に近づく。

$x = 0$ の場合は別に確認する。

$$\begin{aligned} \frac{(0+h)^n - 0^n}{h} &= \frac{h^n}{h} \\ &= h^{n-1} \end{aligned}$$

となり、 $n \geq 2$ では $h^{n-1} \rightarrow 0$ である。これは 0^0 を用いた議論ではない。したがって、正整数 $n \geq 2$ では

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

が成り立つ。

この講では、負の指数や分数指数へは広げない。

多項式の導関数

c は x に依存しない定数とし、 $f(x)$ 、 $g(x)$ はその点で微分可能であるとする。
和の場合、差分商を分けると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} &\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

それぞれの差分商が有限の極限を持つため、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

差の場合も同様に、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

また、定数倍では、次のように計算する。

$$\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

となる。 c は一定の値なので極限の外へ出せる。

したがって、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

この講では、多項式をこれらの公式で項別に微分する。一般の積・商・合成関数の微分公式は扱わない。

関数値と傾きを混同しない

$f(a)$ は点 $x = a$ における高さであり、 $f'(a)$ はその点での傾きである。

例えば $f(1) = 1$ であっても、 $f'(1) = 2$ ならば、位置の値と変化の割合は別の情報である。

導関数を求めるときは、「関数の値を求めているのか」「その場所での変化の割合を求めているのか」を区別する必要がある。

例題 1

関数 $f(x) = x^2$ の導関数を定義から求めなさい。また、 $f'(-1)$ 、 $f'(0)$ 、 $f'(1)$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

定義を使うため、次のように計算する。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

に $f(x) = x^2$ を代入する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

したがって、導関数は $f'(x) = 2x$ である。

ここで求めるのは特定の点での微分係数なので、 x に値を代入する。

$$f'(-1) = -2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1) = 2$$

$-1, 0, 1$ は元の関数上の位置であり、それぞれに対応する傾きが導関数の値である。

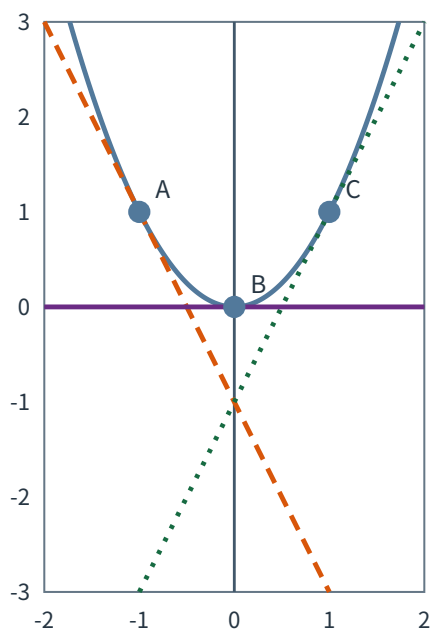


図1 曲線の実線は $y = x^2$ 。A(-1,1) での右下がりの破線 $y = -2x - 1$ は傾き -2 、B(0,0) での水平な実線 $y = 0$ は傾き 0 、C(1,1) での右上がりの点線 $y = 2x - 1$ は傾き 2 の接線。水平な接線 $y = 0$ は x 軸と重なる。横軸は x 、縦軸は y で、縦横の 1 単位の長さは等しい。

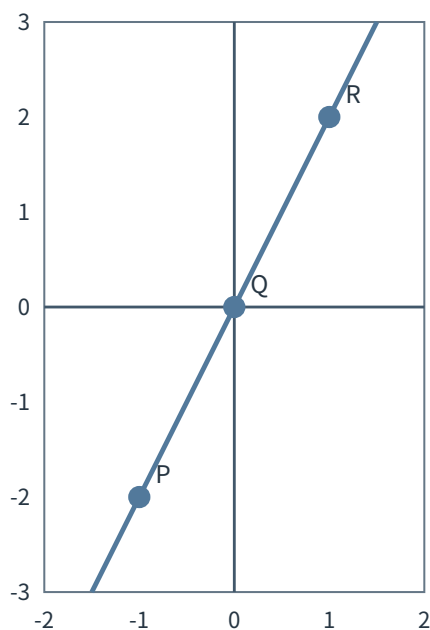


図2 実線は導関数 $y = f'(x) = 2x$ 。同じ x で、図1の $A(-1,1) \rightarrow P(-1,-2)$ 、 $B(0,0) \rightarrow Q(0,0)$ 、 $C(1,1) \rightarrow R(1,2)$ と対応する。P・Q・R の高さ $-2, 0, 2$ は元の関数の接線の傾きであり、元の関数の高さ $1, 0, 1$ ではない。横軸は x 、縦軸は導関数の値で、縦横の 1 単位の長さは等しい。

例題 2

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ の導関数を求め、 $x = 2$ における微分係数を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

多項式なので、各項を分けて微分する。

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(-3x) = -3$$

$$\frac{d}{dx}2 = 0$$

したがって、 $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。

$x = 2$ における微分係数は、次のように計算する。

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 3 \\ &= 12 - 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

よって、 $x = 2$ での傾きは 9 である。

注意点は、 $f(2)$ を求める問題ではないことである。ここでは関数の高さではなく、その点でどれだけ変化するかを求めている。

例題 3

関数 $f(x) = (2x - 1)^2$ の導関数を求めなさい。ただし、展開してから求めること。

例題 3 の解答・解説

指定通り、まず展開する。

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 1)^2 \\ &= 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

展開後の式を項ごとに微分する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(4x^2 - 4x + 1) \\ &= 8x - 4 \end{aligned}$$

したがって、導関数は $f'(x) = 8x - 4$ である。

この段階では括弧の形を見て特別な公式を使うのではなく、展開して多項式に直し、定数倍と和差の公式を使っている。積や合成関数の微分は後の段階で扱う内容である。

練習問題 1

関数 $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ の導関数を求めなさい。

練習問題 2

関数 $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x - 6$ の導関数を求めなさい。

練習問題 3

次の 3 つについて導関数を求めなさい。

- (1) 正整数 $n \geq 2$ に対して、 $f(x) = x^n$ の導関数を求めなさい。
- (2) $f(x) = x$ の導関数を求めなさい。
- (3) 全実数で定義された定数関数 $f(x) = 1$ の導関数を求めなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 8$ について、 $f'(x)$ を求め、 $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を求めなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = (x + 3)(2x - 1)$ の導関数を求めなさい。ただし、積の微分公式は使わず、展開してから求めなさい。

練習問題 6

全実数で定義された定数関数 $f(x) = 1$ について、次の誤った議論の誤りを説明し、正しい導関数を求めなさい。

「 $x = 0$ でも $f(x) = x^0$ と書けるので、 x^n の公式に $n = 0$ を代入すると、 $f'(x) = 0x^{-1} = 0$ となる。」

練習問題 7

関数 $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$ について、導関数 $f'(x)$ を求めなさい。また、 $f(1)$ と $f'(1)$ をそれぞれ求め、両者が表すものの違いを説明しなさい。

練習問題 8

次の 2 つの式について、正しい導関数を求めなさい。また、どちらの計算で誤った公式を使っているか説明しなさい。

- (ア) $f(x) = x^2 + 3x$ に対して $f'(x) = 2x + 3$ とする。
- (イ) $g(x) = x^2 \cdot x^3$ に対して $g'(x) = 2x \cdot 3x^2$ とする。

練習問題 1 の解答・解説

各項を分けて微分する。係数は x に依存しない定数として扱う。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^2 - 3x + 7) \\&= 5 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 \\&= 10x - 3\end{aligned}$$

定数項 7 は変化しないため、微分すると 0 になる。

したがって、 $f'(x) = 10x - 3$ である。

練習問題 2 の解答・解説

負の係数も定数倍の公式をそのまま使う。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(-2x^3 + 4x^2 - 5x - 6) \\&= -2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 \\&= -6x^2 + 8x - 5\end{aligned}$$

係数が負であっても、導関数の公式の形は変わらない。

したがって、 $f'(x) = -6x^2 + 8x - 5$ である。

練習問題 3 の解答・解説

(1) $n \geq 2$ の正整数では、差のべきの因数分解を利用して、次のように計算する。

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ただし、 $x = 0$ では 0^0 を使わず、差分商を直接考える。

$$\frac{(0+h)^n - 0^n}{h} = h^{n-1}$$

であり、 $n \geq 2$ なので $h \rightarrow 0$ のとき 0 になる。

(2) $f(x) = x$ は直接差分商を計算すると、次のように計算する。

$$\frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

したがって、 $f'(x) = 1$ となる。

(3) $f(x) = 1$ は定数関数なので、次のように計算する。

$$\frac{1-1}{h} = 0$$

したがって、 $f'(x) = 0$ である。

x^n の公式、一次関数、定数関数は、それぞれ適用する条件が異なるため、同じ形として扱わないことが重要である。

練習問題 4 の解答・解説

まず導関数を求める。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + x - 8) \\&= 12x^3 - 4x + 1\end{aligned}$$

次に $x = -1$ を代入する。

$$\begin{aligned}f'(-1) &= 12(-1)^3 - 4(-1) + 1 \\&= -12 + 4 + 1 \\&= -7\end{aligned}$$

したがって、導関数は $12x^3 - 4x + 1$ 、 $x = -1$ での微分係数は -7 である。

練習問題 5 の解答・解説

この段階では積の微分公式を使わない。まず展開する。

$$\begin{aligned}f(x) &= (x + 3)(2x - 1) \\&= 2x^2 + 5x - 3\end{aligned}$$

展開後は多項式なので、項ごとに微分できる。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^2 + 5x - 3) \\&= 4x + 5\end{aligned}$$

したがって、 $f'(x) = 4x + 5$ である。

括弧を見て積の微分公式へ進むのではなく、この講では多項式へ直してから微分する。

練習問題 6 の解答・解説

この議論の誤りは、定数関数を x^n の公式へ無条件に代入している点にある。

$f(x) = 1$ は全実数で定義される定数関数である。一方、 $x = 0$ では x^{-1} は定義されず、 0^0 もこの議論で使うことはできない。

したがって、 $n = 0$ を公式へ代入して考えるのではなく、定数関数の差分商から求める。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0$$

よって、 $f'(x) = 0$ である。

正しい理由は「未習の公式だから使えない」ということではなく、定数関数の導関数を差分商の定義から確認すると 0 になるためである。

練習問題 7 の解答・解説

導関数は各項を微分する。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4) \\&= 10x^4 - 9x^2 + 2x\end{aligned}$$

次に $f(1)$ を求める。

$$\begin{aligned}f(1) &= 2 - 3 + 1 - 4 \\&= -4\end{aligned}$$

また、次のように計算する。

$$\begin{aligned}f'(1) &= 10 - 9 + 2 \\&= 3\end{aligned}$$

$f(1) = -4$ は、点 $x = 1$ における関数の値を表す。一方、 $f'(1) = 3$ は、その点での変化の割合を表す。

したがって、関数の高さとは傾きは別の量である。

練習問題 8 の解答・解説

(ア) は正しい。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 + 3x) \\&= 2x + 3\end{aligned}$$

(イ) の誤りは、微分したもの同士を掛ければよいと考えている点である。

与えられた計算では、 $(x^2)'(x^3)' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$ としている。

しかし、実際には $x^2 \cdot x^3 = x^5$ なので、まず整理してから微分すると、 $g'(x) = 5x^4$ になる。

したがって、提示された $6x^3$ は正しい導関数ではない。

一般に、微分した式同士の積にすればよいわけではない。この講では、積の微分公式はまだ扱わないが、使えるかどうか以前に、結果が差分商の定義から得られる導関数と一致するかを確認する必要がある。