

第 45 講 三角形の辺と角の関係

学習目標

- 三角形で、辺とその向かいの角を正しく対応させられる。
- 辺の大小から向かい合う角の大小を判断できる。
- 角の大小から向かい合う辺の大小を判断できる。
- 3つの正の数が三角形の3辺になれるかを、三角形の成立条件から判断できる。

辺と「向かいの角」を対応させる

比べるのは向かい合う辺と角

三角形では、辺の長さや角の大きさには関係があります。

三角形 ABC について、辺 BC 、 CA 、 AB の長さをそれぞれ a, b, c とします。

このとき、

- 辺 a の向かいの角は $\angle A$
- 辺 b の向かいの角は $\angle B$
- 辺 c の向かいの角は $\angle C$

です。

辺と角の大小を比べるときは、隣にある角ではなく、その辺の向かいにある角を見ることが最初のポイントです。

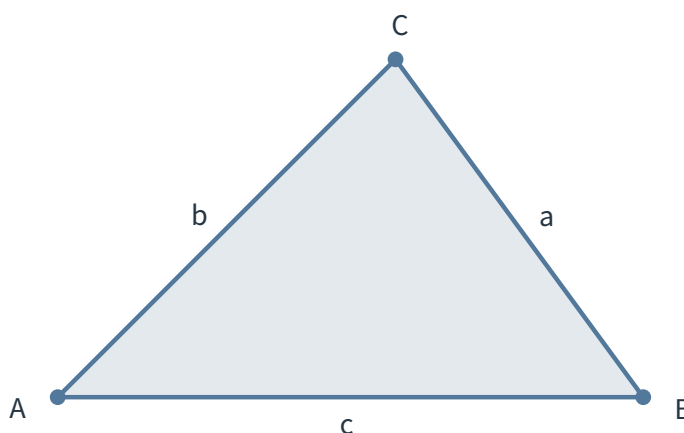


図1 三角形 ABC における辺と向かいの角の対応

辺と角の対応

三角形 ABC では、

$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB$$

とすると、 a, b, c の向かいの角は、それぞれ $\angle A, \angle B, \angle C$ です。

隣の角と比べない

たとえば辺 BC の両端には $\angle B$ と $\angle C$ がありますが、辺 BC と対応するのは向かい側の $\angle A$ です。

辺の大小と角の大小を対応させる問題では、この取り違えに注意します。

大きい辺の向かいの角は大きい**三角形の辺と角の大小関係**

1つの三角形では、2つの辺について、

大きい辺の向かいの角ほど大きい

という関係があります。

三角形 ABC で、

$$a > b$$

なら、

$$\angle A > \angle B$$

です。

辺が長いほど向かい側が大きく開く

三角形の2辺を比べると、長い辺の向かい側には、より大きな角があります。

たとえば、

$$a = 7, \quad b = 5, \quad c = 4$$

なら、最も長い辺は a です。

a の向かい側は $\angle A$ なので、 $\angle A$ が3つの角の中で最も大きくなります。

同じように、最も短い辺が c なら、その向かい側の $\angle C$ が最も小さくなります。

辺から角へ

辺の大小が

$$a > b > c$$

なら、向かいの角も同じ順番になり、

$$\angle A > \angle B > \angle C$$

です。

大きい角の向かいの辺は大きい**逆向きにも使える**

辺と角の大小関係は、角から辺を考えるときにも使えます。

三角形 ABC で、

$$\angle A > \angle B$$

なら、

$$a > b$$

です。
つまり、
大きい角の向かいの辺ほど大きい
と考えることができます。

角から辺へ

角の大小が

$$\angle B > \angle C > \angle A$$

なら、向かいの辺も同じ順番になり、

$$b > c > a$$

です。

同じ三角形の中で比べる

「大きい辺の向かいの角ほど大きい」という関係は、同じ三角形の中の辺と角を比べるときに使います。

別々の三角形の辺の長さだけを比べて、角の大小をそのまま決めることはできません。

等しい辺の向かいの角も等しい

二等辺三角形も同じ関係で見られる

辺の長さが等しい場合には、向かいの角も等しくなります。
たとえば、

$$a = b$$

なら、

$$\angle A = \angle B$$

です。
これは二等辺三角形で底角が等しいことと同じ内容です。
逆に、 $\angle A = \angle B$ なら $a = b$ です。

大小と等号をまとめる

三角形 ABC では、対応する辺と角について、

- $a > b$ なら $\angle A > \angle B$
- $a = b$ なら $\angle A = \angle B$
- $a < b$ なら $\angle A < \angle B$

と、大小関係が同じ向きになります。

3本の線分なら必ず三角形になるわけではない

短い2辺が届くかを考える

長さが 2, 3, 6 の 3本の線分を考えます。
最も長い辺を 6 とすると、残り 2本の長さの和は

$$2 + 3 = 5$$

です。

$5 < 6$ なので、2 本をつないでも最も長い辺の両端まで届きません。

したがって、この 3 本では三角形を作ることができません。

三角形ができるためには、どの 1 辺についても、その長さが残りの 2 辺の和より小さくなければなりません。

三角形の成立条件

3 つの正の数 a, b, c が三角形の 3 辺の長さになるためには、

$$a < b + c$$

$$b < c + a$$

$$c < a + b$$

がすべて成り立つことが必要です。

この条件がすべて成り立つとき、3 辺から三角形を作ることができます。

最も長い辺だけ調べればよい

3 辺のうち最も長い辺が c であるとします。

このとき、三角形ができるかを調べるには、

$$c < a + b$$

を確認すれば十分です。

つまり、

最も長い辺 < 残り 2 辺の和

なら三角形が成立します。

等しい場合は三角形にならない

最も長い辺が残りの 2 辺の和と等しい場合、

$$c = a + b$$

では、3 点が一直線上に並んでしまいます。

したがって、三角形が成立する条件は $c \leq a + b$ ではなく、

$$c < a + b$$

です。

辺の大小と成立条件を使い分ける

何を聞かれているかで判断する

この講では、三角形の辺について 2 つの見方を使います。

すでに三角形ができていて、辺や角の大小を比べるなら、

大きい辺の向かいの角ほど大きい

という関係を使います。

一方、3 つの長さだけが与えられ、それらで三角形が作れるかを調べるなら、

最も長い辺 < 残り 2 辺の和

を確認します。

問題の目的を見て、使う考え方を選びます。

判断の手順

辺・角の大小を比べるとき

1. 辺と向かいの角を対応させる。
2. 与えられた辺または角を大きい順に並べる。
3. 向かい側も同じ順番で並べる。

三角形が作れるか調べるとき

1. 3 辺の中で最も長い辺を見つける。
2. 残り 2 辺の和を求める。
3. 最も長い辺より残り 2 辺の和が大きい確認する。

例題

例題 1

三角形 ABC で、

$$a = 8, \quad b = 5, \quad c = 6$$

です。

$\angle A, \angle B, \angle C$ を大きい順に並べなさい。

例題 1 の解答・解説

辺の大小は、

$$a > c > b$$

です。

大きい辺の向かいの角ほど大きいので、

$$\angle A > \angle C > \angle B$$

です。

例題 2

三角形 ABC で、

$$\angle C > \angle A > \angle B$$

です。

辺 a, b, c を大きい順に並べなさい。

例題 2 の解答・解説

大きい角の向かいの辺ほど大きくなります。

$\angle C$ の向かいの辺は c 、 $\angle A$ の向かいの辺は a 、 $\angle B$ の向かいの辺は b です。

したがって、

$$c > a > b$$

です。

例題 3

次の 3 つの長さを 3 辺とする三角形が作れるか答えなさい。

(1) 4, 6, 9

(2) 3, 5, 8

(3) 5, 5, 7

例題 3 の解答・解説

(1) 最も長い辺は 9 です。

$$4 + 6 = 10 > 9$$

なので、三角形は作れます。

(2) 最も長い辺は 8 です。

$$3 + 5 = 8$$

となり、残り 2 辺の和と最も長い辺が等しいので、三角形は作れません。

(3) 最も長い辺は 7 です。

$$5 + 5 = 10 > 7$$

なので、三角形は作れます。

演習問題**練習問題 1**

三角形 ABC で、

$$a = 4, \quad b = 9, \quad c = 7$$

です。

$\angle A, \angle B, \angle C$ を大きい順に並べなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、

$$\angle A < \angle C < \angle B$$

です。

辺 a, b, c を小さい順に並べなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で $a = c > b$ です。

3 つの角の大小関係を答えなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、

$$\angle A = \angle B > \angle C$$

です。

3 辺の大小関係を答えなさい。

練習問題 5

次の 3 つの長さを 3 辺とする三角形が作れるか答えなさい。

5, 7, 10

練習問題 6

次の 3 つの長さを 3 辺とする三角形が作れるか答えなさい。

2, 6, 9

練習問題 7

長さが $4, 7, x$ の 3 辺から三角形を作ります。

x は正の整数で、 x が 3 辺の中で最も長いとします。

x として可能な最大の値を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、長さが $3, 4, 7$ の 3 本について、

「 $3 + 4 = 7$ だから、ちょうど三角形を作ることができる」

と考えました。

この考えの誤りを説明しなさい。

練習問題 9

三角形 ABC で、最も大きい角が $\angle B$ 、最も小さい角が $\angle C$ です。

3 辺 a, b, c の大小関係を答え、その理由を説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

辺の大小は、

$$b > c > a$$

です。

大きい辺の向かいの角ほど大きいので、

$$\angle B > \angle C > \angle A$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

角を小さい順に見ると、

$$\angle A < \angle C < \angle B$$

です。

向かいの辺も同じ順番になるので、

$$a < c < b$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

$a = c$ なので、向かいの角も等しく、

$$\angle A = \angle C$$

です。

また $a > b$ 、 $c > b$ なので、

$$\angle A > \angle B, \quad \angle C > \angle B$$

です。

したがって、

$$\angle A = \angle C > \angle B$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

$\angle A = \angle B$ なので、向かいの辺も等しく、

$$a = b$$

です。

また、 $\angle A > \angle C$ なので $a > c$ 、 $\angle B > \angle C$ なので $b > c$ です。

したがって、

$$a = b > c$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

最も長い辺は 10 です。

残り 2 辺の和は、

$$5 + 7 = 12$$

です。

$12 > 10$ なので、三角形を作ることができます。

練習問題 6 の解答・解説

最も長い辺は 9 です。

残り 2 辺の和は、

$$2 + 6 = 8$$

です。

$8 < 9$ なので、三角形を作ることはできません。

練習問題 7 の解答・解説

x が最も長い辺なので、三角形が成立するには、

$$x < 4 + 7$$

でなければなりません。

したがって、

$$x < 11$$

です。

x は正の整数なので、可能な最大の値は 10 です。

練習問題 8 の解答・解説

三角形が成立するためには、最も長い辺が残り 2 辺の和より **小さい** 必要があります。

この場合は、

$$3 + 4 = 7$$

で、残り 2 辺の和と最も長い辺が等しくなっています。

このとき 3 点は一直線上に並び、三角形にはなりません。

練習問題 9 の解答・解説

最も大きい角が $\angle B$ なので、その向かいの辺 b が最も長くなります。

最も小さい角が $\angle C$ なので、その向かいの辺 c が最も短くなります。

したがって、

$$b > a > c$$

です。