第 027 講 仕事と運動エネルギー

この講でできるようになること

- 物体の質量と速さから運動エネルギーを計算し、速さや質量との関係を説明できる。
- 対象物体に働くすべての外力の仕事を求め、その和と運動エネルギーの変化を対応させられる。
- 仕事の正負から速さの増減を判断し、速さと運動の向きを区別できる。
- 運動エネルギーを用いて停止までの距離を求め、物理的に成立しない計算結果を見分けられる。

1. 物体の速さが変わるとき

水平な床の上を動く台車を考える。台車を進行方向に押すと速さが増し、進行方向と反対向きの力を受けると速さが減ることがある。

第 026 講では、力が物体に働き、物体が移動したときの「仕事」を学んだ。では、力がした仕事と、物体の速さの変化には、どのような関係があるのだろうか。

例えば、同じ力で同じ距離だけ台車を押しても、摩擦がある場合とない場合では、最終的な速さが異なることがある。押す力だけでなく、摩擦なども台車の運動に影響するためである。

この違いを数量的に説明するために、まず「運動エネルギー」という量を導入する。

2. 運動エネルギーとは何か

運動している物体がもつエネルギー

動いているボールは、ほかの物体に衝突して、その物体を動かすことがある。一般に、同じ質量のボールなら、速く動いているほうが衝突相手を大きく動かせる場合がある。

このような運動に伴うエネルギーを、**運動エネルギー**という。

運動エネルギー

質量 m、速さ v の物体の並進運動のエネルギー K は、次の式で表される。

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- K：運動エネルギー（単位 J）
- m：質量（単位 kg）
- v：速さ（単位 m/s）

速さ v は、運動の向きを含まない非負の量である。ここでは、質量が一定で、通常の高校物理で扱う速さの物体を考える。

運動エネルギーの単位は仕事と同じジュール（J）である。式の単位を確認すると、次のようになる。

$$\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

したがって、運動エネルギーと仕事は、同じ単位で数量を比較できる。

©ミライコーチング

質量と速さはどのように影響するか

運動エネルギーは、質量 m に比例し、速さ v の二乗に比例する。

比較する条件	運動エネルギーの変化
質量を同じにして、速さを 2 倍にする	4 倍になる
質量を同じにして、速さを 3 倍にする	9 倍になる
速さを同じにして、質量を 2 倍にする	2 倍になる
速さを同じにして、質量を半分にする	半分になる

例えば、質量が変わらず速さだけを 2 倍にすると、速さの二乗は 4 倍になる。運動エネルギーも 4 倍になるのであり、2 倍ではない。

一方、速さを変えずに質量だけを 2 倍にすれば、運動エネルギーは 2 倍になる。

速さと向きの区別

運動エネルギーは、速さの二乗で決まる。

右向きに 3 m/s で動く物体と、左向きに 3 m/s で動く同じ質量の物体は、運動エネルギーが等しい。

運動エネルギーだけから、物体が右向きか左向きかを判断することはできない。

1

質量 2 kg の物体 A が水平な直線上を運動している。空気抵抗などの詳細は考えず、次の問いに答えよ。

(1) A が右向きに 3 m/s で動くときの運動エネルギーを求めよ。

(2) A が左向きに 3 m/s で動く場合、運動エネルギーはいくらか。

(3) A の速さが 3 m/s から 6 m/s になったとき、運動エネルギーは何 J 増加するか。

解答・解説

(1) 運動エネルギーの式へ質量と速さを代入する。

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 \\
&= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\
&= 9\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

答えは 9 J である。

(2) 運動エネルギーは速さで決まり、向きには依存しない。左向きでも速さは 3 m/s なので、答えは 9 J である。

(3) 速さが 6 m/s のとき、運動エネルギーは次のようになる。

$$K_{後} = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 36\,\mathrm{J}$$

運動エネルギーの増加量は、後の値から前の値を引いて求める。

$$\Delta K = K_{後} - K_{前}$$
$$= 36\,\mathrm{J} - 9\,\mathrm{J}$$
$$= 27\,\mathrm{J}$$

したがって、運動エネルギーは 27 J 増加する。

ここで、次の計算は運動エネルギーの変化量ではない。

$$\frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s} - 3\,\mathrm{m/s})^2 = 9\,\mathrm{J}$$

速さの差を先に求めて二乗することと、前後の速さをそれぞれ二乗してから差を求めることは異なる。

運動エネルギーの変化量は、前後の運動エネルギーの差である。

3. 合力の仕事と運動エネルギーの変化

一つの力だけで判断してよいか

物体に働く力は一つとは限らない。

例えば、水平な床を右向きに動く物体には、右向きに引く力だけでなく、左向きの摩擦力、下向きの重力、上向きの垂直抗力が働く場合がある。

物体の速さの変化を考えるときには、対象の物体に働くすべての外力を考慮する必要がある。

ここで、**外力**とは、対象として選んだ物体に、ほかの物体などから働く力のことである。

各外力が対象物体にする仕事を足し合わせたものを、合力の仕事 W_{net} という。

仕事と運動エネルギーの関係

物体に働くすべての外力がする仕事の和は、その物体の運動エネルギーの変化量に等しい。

$$W_{\text{net}} = \Delta K = K_{\text{後}} - K_{\text{前}}$$

したがって、

$$W_{\text{net}} = \frac{1}{2}mv_{\text{後}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2$$

である。

- W_{net}：全外力の仕事の和（単位 J）
- ΔK：運動エネルギーの変化量（単位 J）
- $v_{\text{前}}$：はじめの速さ（単位 m/s）
- $v_{\text{後}}$：後の速さ（単位 m/s）

ここでは質量が一定の物体の並進運動を扱う。各速さは同じ慣性系で測ったものである。

なぜ仕事と運動エネルギーが結び付くのか

第 019 講で学んだ運動方程式と、等加速度直線運動の関係を使って確かめる。

質量 m の物体 A が、水平な直線上を運動するとする。右向きを正に定め、A に働く水平方向の合力が一定である場合を考える。

水平方向の合力を F_{net}、加速度を a、位置の変化を Δx とする。これらは右向きを正とした符号付きの量である。

運動方程式より、

$$F_{\text{net}} = ma$$

が成り立つ。

また、はじめの速度の水平成分を u_0、後の速度の水平成分を u とすると、等加速度直線運動では、

$$u^2 - u_0^2 = 2a\Delta x$$

が成り立つ。

両辺に $\frac{m}{2}$ をかけると、

$$ma\Delta x = \frac{1}{2}m(u^2 - u_0^2)$$

となる。

©ミライコーチング

合力が一定のとき、その合力がする仕事は $F_{\text{net}}\Delta x$ である。したがって、

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= F_{\text{net}}\Delta x \\ &= ma\Delta x \\ &= \frac{1}{2}m\left(u^2 - u_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 \\ &= K_{\text{後}} - K_{\text{前}} \end{aligned}$$

となる。

一次元運動では、速度成分 u の絶対値が速さ v なので、$u^2 = v^2$ である。速度が負でも、その二乗は非負になる。

この導出では一定の合力を仮定したが、仕事と運動エネルギーの関係は、合力が一定でない場合にも成立する。力が変化する場合には、その運動区間全体で各外力がした仕事を求める。

仕事の正負は何を示すか

運動エネルギーそのものは負にならないが、運動エネルギーの変化量には正負がある。

合力の仕事	運動エネルギー	前後の速さ
正	増加する	後のほうが大きい
負	減少する	後のほうが小さい
0	変化しない	前後で等しい

この関係は、同じ物体の運動区間の始めと終わりを比較したものである。

合力の仕事が $0\,\text{J}$ であっても、物体が静止していたとは限らない。また、途中で速さが変化しなかったことや、速度の向きが変化しなかったことも意味しない。

変化量を速さの変化の二乗と混同しない

仕事と等しいのは、

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_{\text{後}}^2 - v_{\text{前}}^2\right)$$

である。

一般に、次の式とは等しくない。

$$\frac{1}{2}m\left(v_{\text{後}} - v_{\text{前}}\right)^2$$

必要なのは「運動エネルギーの後の値から前の値を引く」操作である。

---

4. 仕事から後の速さを求める

運動エネルギーと仕事の関係を使うと、運動にかかった時間を求めなくても、後の速さを計算できる場合がある。

手順は次のとおりである。

1. **対象物体と運動区間を決める。** どの物体の、いつからいつまでの変化を調べるのかを明確にする。
2. **対象物体に働く全外力を挙げる。** 力の大きさ、向き、移動方向との関係を確認する。
3. **それぞれの外力の仕事を求める。** 移動方向と同じ向きの成分は正、反対向きの成分は負として計算する。
4. **すべての仕事を足す。** 合計を運動エネルギーの変化量と等しく置く。
5. **後の速さを求める。** 後の運動エネルギーを求めてから、速さの式を解く。

後の運動エネルギーが求まれば、速さは次の式で計算できる。

$$v_{\text{後}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{後}}}{m}}$$

速さは非負なので、平方根は非負の値を選ぶ。運動の向きが必要な場合には、力や運動の条件から別に判断する。

2

質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体 A が、なめらかな水平床上を右向きに $3\,\mathrm{m/s}$ で動いている。

A に一定の右向きの水平力 $5\,\mathrm{N}$ を加え、そのまま右向きに $4\,\mathrm{m}$ 移動させた。

鉛直方向の加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ とし、重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。床との摩擦や空気抵抗はない。

(1) A に働くすべての外力を挙げ、それぞれがする仕事を求めよ。

(2) A の移動後の運動エネルギーを求めよ。

(3) A の移動後の速さを求めよ。

解答・解説

(1) A に働く外力は、右向きの水平力、下向きの重力、上向きの垂直抗力である。

重力の大きさは、

$$mg = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。鉛直方向の加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ なので、垂直抗力の大きさも $20\,\mathrm{N}$ となる。

物体 A の変位は右向きに $4\,\mathrm{m}$ である。

水平力の仕事は、

$$W_F = (5\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{J}$$

となる。

重力と垂直抗力は移動方向に垂直なので、それぞれの仕事は $0\,\mathrm{J}$ である。

したがって、合力の仕事は、

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= W_F + W_g + W_N \\ &= 20\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} \\ &= 20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

(2) はじめの運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

仕事と運動エネルギーの関係より、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= K_{\text{前}} + W_{\text{net}} \\ &= 9\,\mathrm{J} + 20\,\mathrm{J} \\ &= 29\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

(3) 運動エネルギーから速さを求める。

$$\begin{aligned} v_{\text{後}}^2 &= \frac{2K_{\text{後}}}{m} \\ &= \frac{2(29\,\mathrm{J})}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= 29\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

したがって、

$$v_{\text{後}} = \sqrt{29}\,\mathrm{m/s} \approx 5.39\,\mathrm{m/s}$$

となる。

この物体は、はじめから右向きに進み、右向きの合力を受けているので、移動後も右向きに運動している。

別の方法でも確かめられる。運動方程式より、

$$a = \frac{5\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。等加速度直線運動の関係を使えば、

$$\begin{aligned} u^2 &= (3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +2\big(2.5\,\mathrm{m/s^2}\big)(4\,\mathrm{m}) \\ &= 29\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

であり、同じ結果が得られる。

仕事を使う方法と運動方程式を使う方法は、同じ運動を異なる量から捉えているのである。

5. 複数の力が働く場合

床に摩擦があるとき、物体を右向きに引く力が正の仕事をしても、摩擦力が負の仕事をすることがある。

この場合、引く力がした仕事だけを運動エネルギーの変化量としてはいけない。

3

質量 2 kg の物体 A が、水平な床の上を右向きに 4 m/s で滑っている。

A には右向きの一定の引く力 $F = 10\,\mathrm{N}$ が働き、左向きに大きさ $f = 4\,\mathrm{N}$ の動摩擦力が働いている。この状態で A が右向きに 3 m 移動した。

重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、鉛直方向の加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ である。空気抵抗は無視できる。

下図は A に働くすべての外力を示した模式図である。矢印の長さは力の大きさを表し、尺度は 1 N 当たり 6 px とする。速度や変位を表す矢印ではない。

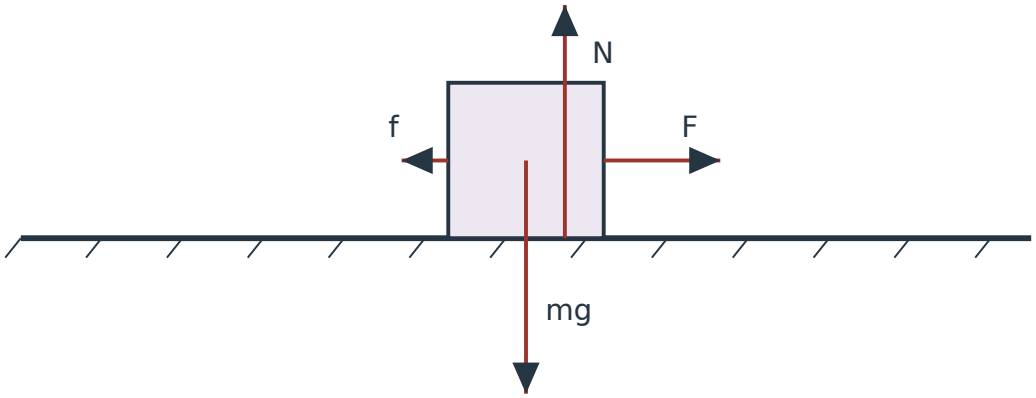

図 1　水平床上の物体 A に働く力（力のみを描いた図）

ここで、mg は重力、N は床からの垂直抗力を表す。図中の矢印の配置は力を区別するための模式的な配置であり、物体の回転を考えるものではない。

(1) 引く力、動摩擦力、重力、垂直抗力が A にする仕事をそれぞれ求めよ。

(2) A に働く合力の仕事を求めよ。

(3) A の移動後の運動エネルギーと速さを求めよ。

©ミライコーチング

解答・解説

(1) A は右向きに 3 m 移動している。

右向きの引く力は移動方向と同じ向きなので、

$$W_F = (10\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J}$$

となる。

動摩擦力は移動方向と反対向きなので、

$$W_f = (-4\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) = -12\,\mathrm{J}$$

となる。

重力と垂直抗力は移動方向に垂直である。A は鉛直方向へ移動しないため、どちらの仕事も 0 J である。

なお、鉛直方向の力は消えているわけではない。重力と垂直抗力は、それぞれ大きさ 20 N でつり合っている。

(2) 合力の仕事は、すべての外力の仕事の和である。

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{net}} &= W_F + W_f + W_g + W_N \\ &= 30\,\mathrm{J} - 12\,\mathrm{J} \\ &\quad +0\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

したがって、A の運動エネルギーは 18 J 増加する。

(3) はじめの運動エネルギーは、

$$K_{\text{前}} = \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(4\,\text{m/s})^2$$
$$= 16\,\text{J}$$

である。

よって、

$$K_{\text{後}} = 16\,\text{J} + 18\,\text{J}$$
$$= 34\,\text{J}$$

となる。

後の速さは、

$$v_{\text{後}} = \sqrt{\frac{2(34\,\text{J})}{2\,\text{kg}}}$$
$$= \sqrt{34}\,\text{m/s}$$
$$\approx 5.83\,\text{m/s}$$

である。

水平方向の合力は右向きなので、A は右向きのまま速さを増している。

引く力の仕事 30 J だけを運動エネルギーの増加量とすると、摩擦の影響を無視した誤った結果になる。

仕事を足すときの判断

仕事と運動エネルギーの関係を使うときは、必ず「どの物体に働く力か」を決める。

水平移動で重力と垂直抗力の仕事が 0 J でも、両者は物体に働いている。仕事がゼロであることと、力が存在しないことは別である。

また、動摩擦力が移動方向と反対向きなら仕事は負になるが、摩擦力がする仕事が常に負になるわけではない。力と対象物体の移動方向の関係によって判断する。

6. 運動エネルギーが減少するとき

物体が運動方向と反対向きの合力を受けると、運動エネルギーが減少することがある。

例えば、右向きに滑る物体が、左向きの動摩擦力を受けて減速する場合である。

物体が停止した瞬間の速さは 0 m/s なので、その瞬間の運動エネルギーも 0 J となる。

運動エネルギーは負にはならないため、計算によって負の運動エネルギーが得られた場合には、計算対象の運動区間や仮定が成立しているかを調べる必要がある。

例えば、摩擦力が物体を停止させた後も、同じ向き・大きさの動摩擦力が働いて、物体がそのまま進み続けると仮定するのは適切ではない。

停止距離を求める式は、停止するまでの運動区間に適用する。 停止後の運動や摩擦力の向きは、停止後の条件を別に考えて判断する必要がある。

また、仕事と運動エネルギーから速さが分かっても、それだけで速度の向きまで決まるわけではない。

演習問題

1

次の各物体の並進運動を考える。すべて同じ慣性系で測った速さとし、運動エネルギーの単位を J とする。

- A：質量 1 kg、速さ 2 m/s
- B：質量 1 kg、速さ 4 m/s
- C：質量 2 kg、速さ 2 m/s

(1) A、B、C の運動エネルギーをそれぞれ求めよ。

(2) A と B を比較し、質量を変えずに速さを 2 倍にすると運動エネルギーが何倍になるか答えよ。

(3) A と C を比較し、速さを変えずに質量を 2 倍にすると運動エネルギーが何倍になるか答えよ。

2

質量 2 kg の物体 A が、水平な直線上で、右向きに 3 m/s の速度から左向きに 3 m/s の速度へ変化した。

A の質量は変わらないものとする。

(1) A の運動エネルギーは、はじめと終わりでそれぞれ何 J か。

(2) この運動区間で、A に働くすべての外力がした仕事の和を求めよ。

(3) 「合力の仕事がゼロなので、物体 A に働く合力は運動中ずっとゼロであった」という説明は正しいか。理由とともに答えよ。

©ミライコーチング

3

質量 2 kg の物体 A が、固定された水平床の上を右向きに 5 m/s で滑っている。

A が右向きに滑っている間、A には左向きに大きさ 5 N の一定の動摩擦力が働く。A に働く水平方向の力は、この動摩擦力だけである。

鉛直方向の加速度は 0 m/s^2、重力加速度の大きさは 10 m/s^2 とし、空気抵抗は無視できる。

下図は、A が右向きに滑っている間に働くすべての外力を示す模式図である。力の矢印の尺度は 1 N 当たり 6 px とする。物体の運動方向は右向きであり、図の矢印は速度や変位を表さない。

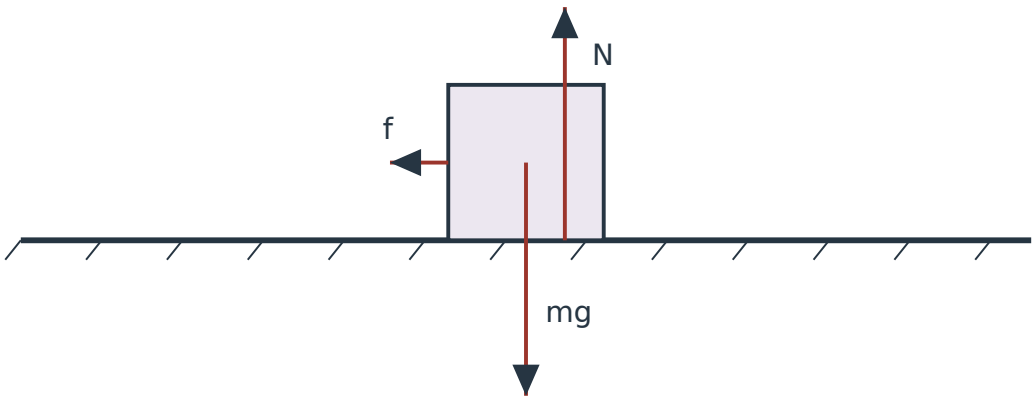

図 2　水平床上の物体 A に働く力（力のみを描いた図）

図の力の配置は、力を区別するための模式的なものである。

(1) A のはじめの運動エネルギーを求めよ。

(2) A が停止するまでに、全外力がした仕事の和を求めよ。

(3) A が停止するまでに右向きに滑る距離を求めよ。

(4) 動摩擦力が左向きに 5 N のまま、A が停止せず右向きに 6 m 滑ると仮定すると、計算上の運動エネルギーはいくらになるか。その結果から、この仮定が成立するか説明せよ。

©ミライコーチング

4

質量 1 kg の物体 A が、ある直線上を速さ 2 m/s で運動している。

(1) はじめの運動エネルギーを求めよ。

(2) その後のある運動区間で、A に働くすべての外力の仕事の和が -1 J であった。この区間の終わりの運動エネルギーと速さを求めよ。

(3) 同じ初期状態から始まる別の運動区間で、全外力の仕事の和が -3 J であったとする。この条件が実現可能か、運動エネルギーから判断し、理由を説明せよ。

5

質量 2 kg の物体 A が、水平な床の上を右向きに 2 m/s で滑っている。

A を、水平方向から上向きに 60° 傾いた方向へ、大きさ 10 N の一定の力で引く。A には左向きに大きさ 1 N の動摩擦力も働く。

この状態で A は床から離れず、右向きに 4 m 水平移動した。鉛直方向の加速度は $0\ \mathrm{m/s^2}$ であり、重力加速度の大きさは $10\ \mathrm{m/s^2}$ とする。空気抵抗は無視できる。

必要なら、$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$、$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いよ。

(1) 引く力と動摩擦力が A にする仕事を、それぞれ求めよ。

(2) A に働く垂直抗力の大きさを求めよ。また、重力と垂直抗力がする仕事をそれぞれ答えよ。

(3) 全外力の仕事の和を求めよ。

(4) 移動後の運動エネルギーと速さを求めよ。

6

質量 3 kg の物体 A について、ある運動区間のはじめの速さが 4 m/s、終わりの速さが 2 m/s であった。

(1) はじめと終わりの運動エネルギーをそれぞれ求めよ。

(2) この区間で全外力が A にした仕事の和を求めよ。

(3) その仕事の符号から、前後の速さについて何が分かるか説明せよ。

(4) この情報だけで、A の終わりの速度の向きを決められるか。理由を説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) それぞれの運動エネルギーを求める。

A について、

$$K_A = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 = 2\,\mathrm{J}$$

B について、

$$K_B = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 = 8\,\mathrm{J}$$

C について、

$$K_C = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 = 4\,\mathrm{J}$$

したがって、A は 2 J、B は 8 J、C は 4 J である。

(2) A と B では質量が等しく、B の速さは A の 2 倍である。

運動エネルギーの比は、

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{8\,\mathrm{J}}{2\,\mathrm{J}} = 4$$

となる。よって 4 倍である。

(3) A と C では速さが等しく、C の質量は A の 2 倍である。

$$\frac{K_C}{K_A} = \frac{4\,\mathrm{J}}{2\,\mathrm{J}} = 2$$

したがって 2 倍である。

運動エネルギーでは、質量は一乗、速さは二乗で関係することが分かる。

2

(1) はじめも終わりも、速さは 3 m/s である。

したがって、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(3\,\text{m/s})^2 \\ &= 9\,\text{J} \end{aligned}$$

同様に、

$$K_{\text{後}} = 9\,\text{J}$$

である。

(2) 全外力の仕事の和は運動エネルギーの変化量に等しい。

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= K_{\text{後}} - K_{\text{前}} \\ &= 9\,\text{J} - 9\,\text{J} \\ &= 0\,\text{J} \end{aligned}$$

答えは 0 J である。

(3) 正しくない。

合力の仕事が 0 J という結果は、はじめと終わりの運動エネルギーが等しいことを示すだけである。

今回、物体 A は右向きの速度から左向きの速度へ変化している。実際に向きが反転するには、運動の途中で速度を変化させる力の作用が必要である。

例えば、途中で速さが減少して停止し、その後、逆向きに速さが増すような運動も考えられる。その場合でも、前後の速さが等しければ、全区間の合力の仕事は 0 J となる。

したがって、**仕事の和がゼロであることから、合力が運動中ずっとゼロであったとはいえない**。

3

(1) はじめの速さは 5 m/s なので、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(5\,\text{m/s})^2 \\ &= 25\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

(2) 停止した瞬間の速さは 0 m/s なので、

$$K_{\text{後}} = 0\,\text{J}$$

となる。

したがって、停止までに全外力がした仕事の和は、

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= K_{\text{後}} - K_{\text{前}} \\ &= 0\,\text{J} - 25\,\text{J} \\ &= -25\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

(3) 停止までに右向きに滑る距離を d とする。

A に働く力は、左向きの動摩擦力、下向きの重力、上向きの垂直抗力である。

重力と垂直抗力は水平移動に対して仕事をしないため、停止までの合力の仕事は動摩擦力の仕事に等しい。

$$(-5\,\mathrm{N})d = -25\,\mathrm{J}$$

よって、

$$d = \frac{25\,\mathrm{J}}{5\,\mathrm{N}} = 5\,\mathrm{m}$$

となる。

答えは 5 m である。

(4) 仮に A が右向きに 6 m 滑り、その間ずっと左向きに 5 N の動摩擦力を受けるとすると、その仕事は、

$$\begin{aligned} W_f &= (-5\,\mathrm{N})(6\,\mathrm{m}) \\ &= -30\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

これを運動エネルギーの関係に代入すると、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= K_{\text{前}} + W_{\text{net}} \\ &= 25\,\mathrm{J} - 30\,\mathrm{J} \\ &= -5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

しかし、運動エネルギー $K = m\frac{v^2}{2}$ は負にならない。したがって、仮定した右向き 6 m の滑走は、この条件のままでは成立しない。

A は右向きに 5 m 滑った時点で停止する。停止後に同じ左向きの動摩擦力が働き続けて、さらに右向きに滑るとは考えられない。

停止後の状態を判断するには、接触やその後に働く力の条件を改めて考える必要がある。

4

(1) はじめの速さは 2 m/s、質量は 1 kg なので、運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2 \\ &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

答えは 2 J である。

(2) 全外力の仕事の和が $-1\,\mathrm{J}$ であるため、仕事と運動エネルギーの関係より、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= K_{\text{前}} + W_{\text{net}} \\ &= 2\,\mathrm{J} + (-1\,\mathrm{J}) \\ &= 1\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

後の速さは、運動エネルギーの式を変形して求める。

$$\begin{aligned} v_{\text{後}}^2 &= \frac{2K_{\text{後}}}{m} \\ &= \frac{2(1\,\mathrm{J})}{1\,\mathrm{kg}} \\ &= 2\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \sqrt{2}\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 1.41\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

速さは非負の量なので、平方根の非負の値を選ぶ。

答えは、運動エネルギーが $1\,\mathrm{J}$、速さが $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$ である。

全外力の仕事が負であるため、運動エネルギーは減少し、後の速さははじめより小さくなる。ただし、この情報だけから速度の向きは決まらない。

(3) 全外力の仕事の和が $-3\,\mathrm{J}$ であると仮定すると、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= K_{\text{前}} + W_{\text{net}} \\ &= 2\,\mathrm{J} + (-3\,\mathrm{J}) \\ &= -1\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

しかし、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

で定義される。

質量が正であり、速さの二乗が非負であるため、運動エネルギーが負になることはない。

今回の物体が最初にもっている運動エネルギーは $2\,\mathrm{J}$ である。運動エネルギーが $0\,\mathrm{J}$ になるまでに減少できる量は最大で $2\,\mathrm{J}$ であり、そこからさらに $1\,\mathrm{J}$ 減少することはできない。

したがって、全外力の仕事が $-3\,\mathrm{J}$ となる運動区間は、与えられた初期条件のもとでは成立しない。

負の運動エネルギーが計算されたときは、その値を答えとして採用するのではなく、**仮定した運動区間や力の条件が実現可能かを確認する必要がある**。

5

(1) 物体 A の変位は右向きに 4 m である。

引く力は水平方向から上向きに 60° 傾いているので、水平方向の成分は、

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos 60^\circ \\ &= (10\,\mathrm{N}) \times \frac{1}{2} \\ &= 5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

物体 A は水平方向に移動するため、引く力がする仕事は、この水平成分を使って求める。

$$\begin{aligned} W_F &= F_x d \\ &= (5\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) \\ &= 20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

動摩擦力は左向きに 1 N であり、右向きの変位とは反対向きである。

したがって、動摩擦力がする仕事は、

$$\begin{aligned} W_f &= (-1\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) \\ &= -4\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

答えは、引く力の仕事が 20 J、動摩擦力の仕事が −4 J である。

(2) 物体 A に働く鉛直方向の外力は、下向きの重力、上向きの垂直抗力、引く力の上向き成分である。

重力の大きさは、

$$\begin{aligned} mg &= (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

引く力の鉛直上向き成分は、

$$\begin{aligned} F_y &= F\sin 60^\circ \\ &= (10\,\mathrm{N}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

物体 A は床から離れず、鉛直方向の加速度が $0\,\mathrm{m/s^2}$ なので、鉛直方向の合力はゼロである。

上向きを正とし、垂直抗力の大きさを N とすると、

$$N + F_y - mg = 0\,\mathrm{N}$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} N &= mg - F_y \\ &= 20\,\mathrm{N} - 5\sqrt{3}\,\mathrm{N} \\ &= \left(20 - 5\sqrt{3}\right)\mathrm{N} \\ &\approx 11.34\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

この値は正であるため、床から上向きの垂直抗力を受けるという条件と矛盾しない。

一方、物体 A の変位は水平方向だけである。

重力と垂直抗力はどちらも鉛直方向に働くため、移動方向に垂直である。

したがって、

$$W_g = 0\,\mathrm{J}$$

$$W_N = 0\,\mathrm{J}$$

となる。

答えは、垂直抗力の大きさが $\left(20 - 5\sqrt{3}\right)\,\mathrm{N}$、重力と垂直抗力の仕事がそれぞれ $0\,\mathrm{J}$ である。

垂直抗力や重力の仕事がゼロであっても、それらの力が物体 A に働いていないわけではない。

(3) 物体 A に働くすべての外力は、引く力、動摩擦力、重力、垂直抗力である。

したがって、全外力の仕事の和は、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{net}} &= W_F + W_f + W_g + W_N \\ &= 20\,\mathrm{J} + (-4\,\mathrm{J}) \\ &\quad +0\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} \\ &= 16\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

答えは $16\,\mathrm{J}$ である。

引く力がした仕事だけではなく、動摩擦力がした負の仕事も加える必要がある。

(4) はじめの運動エネルギーは、質量 2 kg、速さ 2 m/s より、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2 \\ &= \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(2\,\text{m/s})^2 \\ &= 4\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

全外力の仕事の和は 16 J なので、仕事と運動エネルギーの関係から、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= K_{\text{前}} + W_{\text{net}} \\ &= 4\,\text{J} + 16\,\text{J} \\ &= 20\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

後の速さを $v_{\text{後}}$ とすると、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}}^2 &= \frac{2K_{\text{後}}}{m} \\ &= \frac{2(20\,\text{J})}{2\,\text{kg}} \\ &= 20\,\text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} v_{\text{後}} &= \sqrt{20}\,\text{m/s} \\ &= 2\sqrt{5}\,\text{m/s} \\ &\approx 4.47\,\text{m/s} \end{aligned}$$

となる。

答えは、移動後の運動エネルギーが 20 J、速さが $\sqrt{20}\,\text{m/s}$ である。

この運動では、引く力の水平成分が 5 N、動摩擦力が左向きに 1 N なので、水平方向の合力は右向きに 4 N である。

物体 A ははじめから右向きに動いているため、移動後も右向きに運動し、速さが増加している。

斜めの力がする仕事

物体が水平に移動するとき、斜めに働く力の仕事は、その力の水平成分と水平変位から求められる。

ただし、運動エネルギーの変化を求めるときには、その力だけでなく、対象物体に働くすべての外力の仕事を足し合わせる。

鉛直方向の力は、仕事がゼロであっても、垂直抗力の大きさなどを決めるうえで必要になる。

©ミライコーチング

6

(1) はじめの速さは 4 m/s なので、運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{前}}^2 \\ &= \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(4\,\text{m/s})^2 \\ &= 24\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

終わりの速さは 2 m/s なので、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{後}}^2 \\ &= \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(2\,\text{m/s})^2 \\ &= 6\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

答えは、はじめが 24 J、終わりが 6 J である。

(2) 仕事と運動エネルギーの関係より、

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= K_{\text{後}} - K_{\text{前}} \\ &= 6\,\text{J} - 24\,\text{J} \\ &= -18\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

答えは −18 J である。

この値は、対象物体 A に働くすべての外力が、この運動区間全体でした仕事の和である。

(3) 全外力の仕事の和が負なので、運動エネルギーは減少している。

今回、はじめの速さは 4 m/s、終わりの速さは 2 m/s である。

したがって、**運動区間の終わりの速さは、はじめの速さより小さい**ことが分かる。

ただし、これは区間の始めと終わりの比較である。途中で速さが一時的に増加した可能性までは否定できない。

(4) この情報だけでは、物体 A の終わりの速度の向きは決められない。

運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

で表され、速度の向きではなく速さの二乗で決まる。

例えば、終わりの速度が右向きに 2 m/s の場合でも、左向きに 2 m/s の場合でも、終わりの運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{後} &= \frac{1}{2}(3\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

どちらの場合も、はじめの運動エネルギーが 24 J であれば、全外力の仕事の和は −18 J となる。

したがって、仕事と運動エネルギーの関係だけから、速度の向きを一意に決めることはできない。

速度の向きを判断するには、初めの運動方向、各時刻に働く力、運動の途中で向きが変わったかどうかなど、別の条件が必要である。

運動エネルギーは速さを表す情報であり、速度の向きまで表すものではない。