

第 56 講 和の法則と積の法則

学習目標

- ・場合分けが互いに重ならないとき、「または」で場合の数を足せる。
- ・選択を順に行い、各段階の選択肢数が一定のとき、「そして」で場合の数を掛けられる。
- ・列挙や樹形図と、和の法則・積の法則の計算を対応させられる。
- ・足す場面と掛ける場面を、条件を確認して使い分けられる。

数え上げを「足す」と「掛ける」で整理する

列挙した結果に共通する形を見つける

前講では、すべての場合を列挙したり、樹形図で枝分かれを整理したりして数えました。
たとえば、次の 2 種類の場面があります。

- ・「A の場合**または** B の場合」のように、別々の場合に分けて数える。
- ・「まず A を選び、**そして** B を選ぶ」のように、選択を順に行う。

前者では、条件を満たす場合どうしが重なっていなければ、それぞれの場合の数を**足す**ことができます。

後者では、各段階で選べる数が一定なら、それぞれの選択肢数を**掛ける**ことができます。
この「足す」と「掛ける」が、和の法則と積の法則です。

最初に見る言葉

- ・「A の場合**または** B の場合」→ 和の法則を考える。
- ・「A を選び、**そして** B を選ぶ」→ 積の法則を考える。

ただし、言葉だけで決めず、条件が重なっていないか、各段階の選択肢数が一定かも確認します。

和の法則

和の法則

あることを行う方法が、

- ・ A の場合に m 通り
- ・ B の場合に n 通り

あり、A の場合と B の場合が**同時に起こらず、重ならない**とします。

このとき、A の場合または B の場合の方法は、

$$m + n$$

通りです。

これを**和の法則**といいます。

なぜ足してよいのか

たとえば、ある展示で入口を選ぶとします。

- ・ 東入口から入る方法が 3 通り
- ・ 西入口から入る方法が 2 通り

あり、1 回の入場では東入口か西入口のどちらか一方だけを使うとします。

東入口の場合と西入口の場合は重なりません。

したがって、全部の場合を並べると、

- ・ 東 1
- ・ 東 2
- ・ 東 3
- ・ 西 1
- ・ 西 2

となり、全部で $3 + 2 = 5$ 通りです。

これは、別々の枝の枝先をまとめて数えていると考えられます。

場合分け	枝先	場合の数
東入口の場合	東 1、東 2、東 3	3
西入口の場合	西 1、西 2	2

2 つの場合は重ならないので、枝先は全部で $3 + 2 = 5$ 個です。

和の法則を使う条件

足す前に、場合分けしたグループが**重なっていない**ことを確認します。

重なりがあると、同じ場合を 2 回数えてしまうため、そのまま足すことはできません。

重なりがある場合はそのまま足せない

A の場合にも B の場合にも含まれるものがあるとき、

$$A \text{ の場合の数} + B \text{ の場合の数}$$

とすると、共通する場合を重複して数えてしまいます。

L01 では、和の法則を使う問題は、場合分けが互いに重ならないことを確認してから計算します。

積の法則

積の法則

あることを行うために、

1. まず第 1 段階で m 通りから 1 つ選ぶ。
2. そのどの**選び方**の**あとでも**、第 2 段階で n 通りから 1 つ選ぶ。

とします。

このとき、2 段階の選び方は、

$$m \cdot n$$

通りです。

これを**積の法則**といいます。

樹形図の枝をまとめて数える

上着を「白・黒」の 2 種類から選び、そのあと帽子を「赤・青・緑」の 3 種類から選ぶとします。

樹形図では、白の先にも 3 本、黒の先にも 3 本の枝が伸びます。

1 段階目（上着）	2 段階目（帽子）	枝先に対応する組合せ
白	赤・青・緑	白・赤、白・青、白・緑
黒	赤・青・緑	黒・赤、黒・青、黒・緑

第 1 段階は 2 通りあり、**そのどの場合でも**第 2 段階は 3 通りです。

したがって、枝先の数は $2 \cdot 3 = 6$ 通りです。

積の法則を使う条件

単純に掛けるためには、各段階の選択枝数を確認します。

たとえば、

- ・ 第 1 段階は 2 通り
- ・ 第 1 段階のどの場合でも、第 2 段階は 3 通り

なら、

$$2 \cdot 3$$

とできます。

第 1 段階の選び方によって第 2 段階の選択枝数が変わる場合は、同じ数を一律に掛けることはできません。

枝の数が途中で変わる場合

最初に A を選んだときは次が 2 通り、最初に B を選んだときは次が 3 通りなら、

「第 2 段階はいつでも同じ数」とはいえませんが、

その場合は樹形図や場合分けに戻り、A の場合と B の場合をそれぞれ数えて整理します。

「または」と「そして」を見分ける

1 回の選択か、連続した選択か

次の 2 つを比べます。

場面 1

赤いカード 3 枚のうち 1 枚を選ぶ**または**青いカード 2 枚のうち 1 枚を選ぶ。

赤を選ぶ場合と青を選ぶ場合は重ならないので、

$$3 + 2 = 5$$

通りです。

場面 2

カードを 3 種類から 1 枚選び、**そして**記号を 2 種類から 1 つ選ぶ。

最初のどのカードを選んでも、記号は 2 種類から選べるので、

$$3 \cdot 2 = 6$$

通りです。

「または」で別々のグループをまとめるのか、「そして」で選択をつなぐののかを見ることが重要です。

判断の手順

1. 何を 1 つの場合として数えるか確認する。
2. 「または」の場合分けなら、グループどうしが重ならないか確認する。
3. 重ならないければ、それぞれの場合の数を足す。
4. 「そして」の段階選択なら、各段階の選択枝数を確認する。
5. どの枝でも次の選択枝数が同じなら、その数を掛ける。

和の法則と積の法則を組み合わせて考える

樹形図で構造を確認する

ある案内板で、最初に A コースまたは B コースを選ぶとします。
A コースでは、そのあと「赤・青」の 2 種類から標識を選びます。
B コースでは、そのあと「白・黒・緑」の 3 種類から標識を選びます。
A コースと B コースでは、2 段階目の選択枝数が異なります。

そこで、

- ・ A コースの場合は 2 通り
- ・ B コースの場合は 3 通り

と別々に数えます。

A コースと B コースは重ならないので、最後に $2 + 3 = 5$ 通りとします。

1 段階目 (コース)	2 段階目 (標識)	枝先	場合の数
A コース	赤・青	A・赤、A・青	2
B コース	白・黒・緑	B・白、B・黒、B・緑	3

枝先は全部で $2 + 3 = 5$ 個です。

このように、単純に掛けられないときは樹形図へ戻ると、どこを足せばよいかが見えます。

公式より構造を先に見る

和の法則と積の法則は、樹形図を短く数えるための考え方です。

迷ったときは樹形図や列挙に戻り、

- ・ 横に分かれた別の場合をまとめる → 足す
- ・ 同じ数の枝が各段階で続く → 掛ける

と確認します。

例題

例題 1

ある棚には、赤い箱が 4 個、青い箱が 3 個あります。
赤い箱を 1 個選ぶか、青い箱を 1 個選びます。
赤い箱と青い箱は別の箱であり、同時に 2 個は選びません。
選び方は全部で何通りありますか。

例題 1 の解答・解説

赤い箱を選ぶ場合は 4 通り、青い箱を選ぶ場合は 3 通りです。

2 つの場合は重ならないので、和の法則を使います。

したがって、選び方は $4 + 3 = 7$ 通りです。

例題 2

飲み物を「水・お茶・ジュース」の 3 種類から 1 つ選び、そのあとパンを「あん・クリーム」の 2 種類から 1 つ選びます。

どの飲み物を選んでも、パンは 2 種類から選べます。

選び方は全部で何通りありますか。

例題 2 の解答・解説

第 1 段階の飲み物は 3 通りです。

また、どの飲み物を選んでも、第 2 段階のパンは 2 通りです。

したがって、積の法則より $3 \cdot 2 = 6$ 通りです。

列挙すると、

- ・ 水・あん
- ・ 水・クリーム
- ・ お茶・あん
- ・ お茶・クリーム
- ・ ジュース・あん
- ・ ジュース・クリーム

となり、6 通りであることを確認できます。

例題 3

最初に A コースまたは B コースを選びます。

A コースを選んだ場合、そのあと「上・下」の 2 通りから進み方を選びます。

B コースを選んだ場合、そのあと「左・中央・右」の 3 通りから進み方を選びます。

全部で何通りの進み方がありますか。

例題 3 の解答・解説

A コースの場合は、

- ・ A・上
- ・ A・下

の 2 通りです。

B コースの場合は、

- ・ B・左
- ・ B・中央
- ・ B・右

の 3 通りです。

A コースと B コースの場合は重なりません。

したがって、和の法則より $2 + 3 = 5$ 通りです。

この問題では A と B で 2 段階目の選択肢数が異なるため、単純に一定の数を掛けるのではなく、場合分けして数えます。

演習問題

練習問題 1

白いカードが 3 枚、黒いカードが 4 枚あります。
白いカードを 1 枚選ぶか、黒いカードを 1 枚選びます。
全部で何通りの選び方がありますか。また、なぜ和の法則を使えるのか説明しなさい。

練習問題 2

上着を「白・黒」の 2 種類から 1 つ選び、そのあと靴を「A・B・C」の 3 種類から 1 つ選びます。
どの上着を選んでも、靴は 3 種類すべてから選べます。
全部で何通りありますか。

練習問題 3

最初に記号を「○・△・□」の 3 種類から 1 つ選び、そのあと数字を「1・2」の 2 種類から 1 つ選びます。
すべての結果を列挙し、積の法則で求めた場合の数と一致することを確認しなさい。

練習問題 4

ある入口では、北側から入る方法が 2 通り、南側から入る方法が 5 通りあります。
1 回の入場では北側か南側のどちらか一方だけを使います。
全部で何通りの入り方がありますか。

練習問題 5

飲み物を 4 種類から 1 つ選び、そのあとデザートに 2 種類から 1 つ選びます。
どの飲み物を選んでもデザートは 2 種類から選べます。
全部で何通りありますか。また、「各段階の選択枝数が一定」という点を説明しなさい。

練習問題 6

最初に A または B を選びます。
A を選んだ場合、そのあと 1, 2 の 2 種類から 1 つ選びます。
B を選んだ場合、そのあと 1, 2, 3 の 3 種類から 1 つ選びます。
全部で何通りありますか。また、最初の選択枝数 2 と、2 段階目のある 1 つの数を単純に掛けてはいけない理由を説明しなさい。

練習問題 7

次の場面で、和の法則と積の法則のどちらを使うのが適切か答えなさい。

- (1) 赤い札 3 枚のどれか 1 枚、または青い札 2 枚のどれか 1 枚を選ぶ。
- (2) 文字を 3 種類から 1 つ選び、そして数字を 4 種類から 1 つ選ぶ。どの文字を選んでも数字は 4 種類から選べる。

練習問題 8

ある生徒は、
「A の場合が 4 通り、B の場合が 3 通りなら、いつでも $4 + 3 = 7$ 通りである」
と考えました。
この考え方が正しくない場合がある理由を、「重なり」という言葉を使って説明しなさい。

練習問題 9

最初に「赤・青」の 2 種類から 1 つ選び、次に「丸・三角」の 2 種類から 1 つ選び、最後に「大・小」の 2 種類から 1 つ選びます。
各段階の選択枝数が、それまでの選び方によらず一定であることを確認したうえで、全部で何通りあるか求めなさい。
また、すべての場合を列挙して検算しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

白いカードを選ぶ場合は 3 通り、黒いカードを選ぶ場合は 4 通りです。
白いカードを選ぶ場合と黒いカードを選ぶ場合は重ならないので、和の法則を使えます。
したがって、全部で $3 + 4 = 7$ 通りです。

練習問題 2 の解答・解説

上着は 2 通りです。
どの上着を選んだ場合でも、靴は 3 通りから選べます。
したがって、積の法則より $2 \cdot 3 = 6$ 通りです。

練習問題 3 の解答・解説

列挙すると、

- ・ ○・1
- ・ ○・2
- ・ △・1
- ・ △・2
- ・ □・1
- ・ □・2

の 6 通りです。

第 1 段階は 3 通りで、そのどの場合でも第 2 段階は 2 通りなので、積の法則では $3 \cdot 2 = 6$ 通りです。
列挙した結果と一致します。

練習問題 4 の解答・解説

北側から入る場合は 2 通り、南側から入る場合は 5 通りです。
1 回の入場で両方を同時に使うことはないの、2 つの場合は重なりません。
したがって、和の法則より $2 + 5 = 7$ 通りです。

練習問題 5 の解答・解説

第 1 段階の飲み物は 4 通りです。
そして、どの飲み物を選んでも第 2 段階のデザートは 2 通りです。
つまり、第 2 段階の選択枝数は、1 段階目の選び方によらず一定です。
したがって、積の法則より $4 \cdot 2 = 8$ 通りです。

練習問題 6 の解答・解説

A を選んだ場合は、

- ・ A・1
- ・ A・2

の 2 通りです。

B を選んだ場合は、

- ・ B・1
- ・ B・2
- ・ B・3

の 3 通りです。

A の場合と B の場合は重ならないので、全部で $2 + 3 = 5$ 通りです。

A のあとでは 2 通り、B のあとでは 3 通りなので、2 段階目の選択枝数が一定ではありません。
そのため、「最初は 2 通りだから、次の数を 1 つ決めて掛ける」という単純な積の法則の使い方はできません。

練習問題 7 の解答・解説

(1) は和の法則です。

赤い札を選ぶ場合と青い札を選ぶ場合は重ならず、「赤または青」と場合分けして数えるからです。

(2) は積の法則です。

文字を選び、そして数字を選ぶという 2 段階の選択で、どの文字を選んでも数字は 4 種類から選べるからです。

練習問題 8 の解答・解説

A の場合と B の場合に重なりがあると、 $4 + 3$ としたときに、その重なっている場合を 2 回数えることになります。

したがって、和の法則でそのまま足すためには、A の場合と B の場合が互いに重ならないことを確認する必要があります。

練習問題 9 の解答・解説

第 1 段階は赤・青の 2 通りです。

そのどちらを選んでも、第 2 段階は丸・三角の 2 通りです。

さらに、それまでの選び方に関係なく、第 3 段階は大・小の 2 通りです。

したがって、各段階の選択枝数は一定なので、積の法則より $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ 通りです。

列挙すると、

- ・ 赤・丸・大
- ・ 赤・丸・小
- ・ 赤・三角・大
- ・ 赤・三角・小
- ・ 青・丸・大
- ・ 青・丸・小
- ・ 青・三角・大
- ・ 青・三角・小

の 8 通りで、計算と一致します。