第 251 講 複素数の極形式

学習目標

- 複素数 z を、絶対値 r と偏角 θ を用いて極形式で表せる。
- 直交形式 $a+bi$ と極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を相互に変換できる。
- 複素数がある象限を確かめ、偏角を正しく選べる。
- 偏角の多価性と、0 の偏角が定義されないことを説明できる。

1. 絶対値と偏角で複素数を表す

点の位置を距離と向きで指定する

$z=a+bi$ に対応する点を $P(a,b)$ とする。$z\neq 0$ のとき、原点 O から P までの距離を

$$r=|\,z\,|=\sqrt{a^2+b^2}$$

とする。また、正の実軸を始線とし、反時計回りを正の向きとして、始線から半直線 OP まで測った角を θ とする。この θ を z の偏角という。直角三角形の関係から

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\qquad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

であるため、$a=r\cos\theta$、$b=r\sin\theta$ である。したがって、

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と書ける。

複素数の極形式

$z\neq 0$ に対して、$r=|\,z\,|>0$、θ を z の偏角とするとき、

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

を z の極形式という。本講では r を常に非負とする。

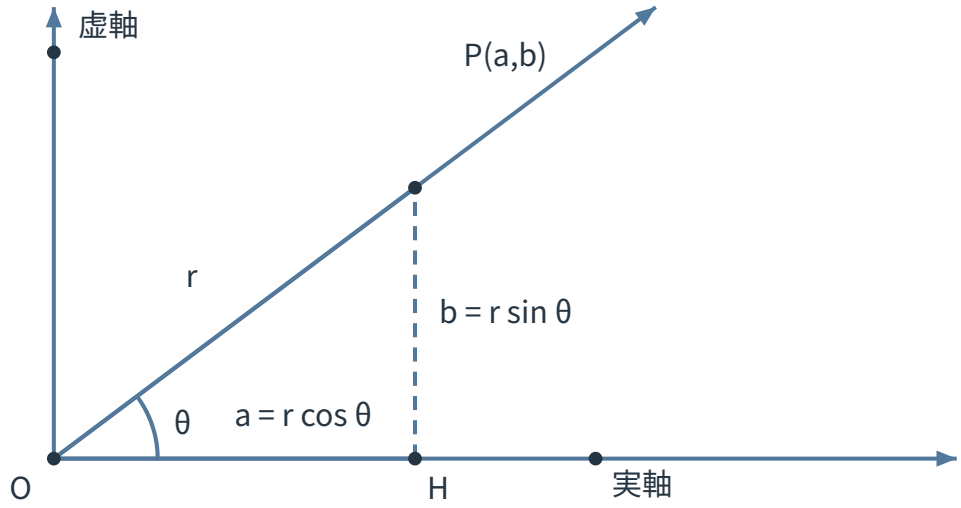

図 1　$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の絶対値と偏角

例題 1：直交形式を極形式へ直す

$z = \sqrt{3} + i$ を極形式で表せ。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。

例題 1 の解答・解説

まず絶対値は

$$r = |\, z \,| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

である。点 $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ は第 1 象限にあり、

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

なので、$\theta = \frac{\pi}{6}$ である。したがって、

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

である。

2. 象限を確かめて偏角を選ぶ

三角比だけでなく象限を見る

$a \neq 0$ のときの $\tan\theta = \frac{b}{a}$ だけから偏角を決めると、向きが反対の角を選ぶことがある。実部 a と虚部 b の符号から点の象限を確かめ、その象限にある角を選ぶことが重要である。

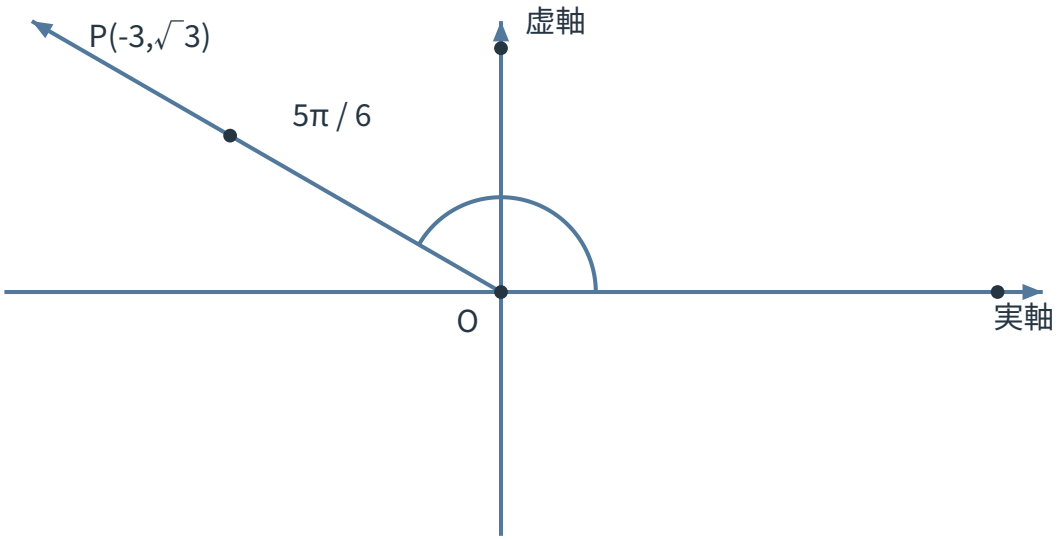

図 2　実部と虚部の符号で偏角の象限を判定する

例題 2：第 2 象限の複素数を極形式へ直す

$z = -3 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。

例題 2 の解答・解説

絶対値は

$$r = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$$

である。実部が負、虚部が正なので、点は第 2 象限にある。また、基準となる鋭角は $\frac{\pi}{6}$ であるため、偏角は

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

である。したがって、

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

である。

例題 3：極形式を直交形式へ直す

$z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ を $a + bi$ の形で表せ。

例題 3 の解答・解説

$7\frac{\pi}{6}$ は第 3 象限の角であり、

$$\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

である。よって、

$$z=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}-2i$$

である。

3. 偏角は 1 つとは限らない

同じ半直線を表す角

角に 2π の整数倍を加えても、半直線の向きは変わらない。したがって、$z\neq 0$ の偏角の 1 つが θ なら、偏角全体は

$$\theta+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

である。これを

$$\arg z=\theta+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

と表すことがある。問題で範囲が指定されているときは、その範囲に入る角を選ぶ。

0 の扱いと絶対値の符号

$z=0$ では原点から出る向きが定まらないため、偏角は定義されない。ただし、$0=0(\cos\theta+i\sin\theta)$ という等式自体は任意の θ で成り立つ。この等式を根拠に 0 の偏角を定めてはならない。また、極形式の r は $|z|$ なので $r\geq 0$ である。$z\neq 0$ なら $r>0$ である。負の数を r に置く表し方は、本講でいう極形式として採用しない。

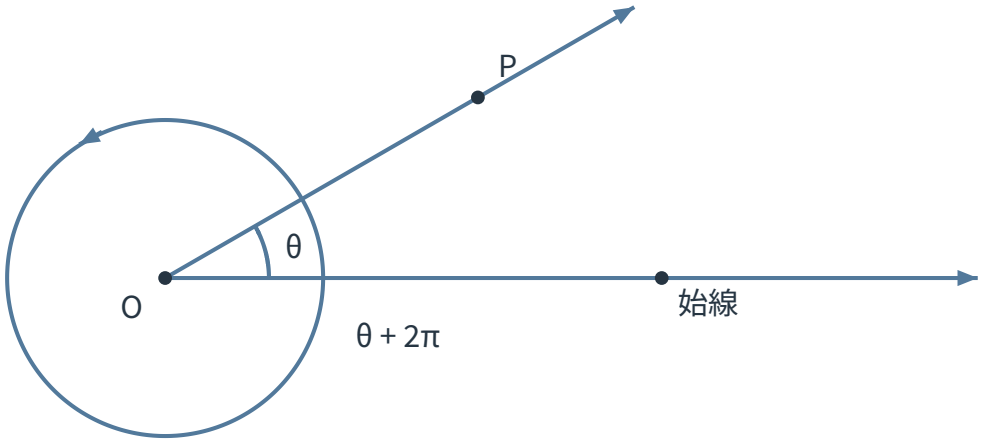

図 3　θ と $\theta+2\pi$ は同じ半直線を表す

4. 演習問題

演習 1：第 1 象限の極形式

$z = 1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。

演習 2：第 3 象限の極形式

$z = -\sqrt{3} - i$ を極形式で表せ。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。

演習 3：軸上の複素数

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。
(1) $z = -5$
(2) $z = -4i$

演習 4：直交形式への変換

次の複素数を $a + bi$ の形で表せ。
(1) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
(2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

©ミライコーチング

演習 5：偏角を指定された範囲で表す

$z = 1 - i$ について、次の範囲にある偏角をそれぞれ 1 つ答えよ。
(1) $0 \leq \theta < 2\pi$
(2) $-\pi < \theta \leq \pi$
また、偏角全体を表せ。

演習 6：絶対値と偏角から複素数を決める

$|\,z\,| = 6$ であり、z の偏角の 1 つが $5\frac{\pi}{3}$ であるとき、z を $a + bi$ の形で表せ。また、この z の偏角全体を表せ。

5. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ である。点 $\left(1, \sqrt{3}\right)$ は第 1 象限にあり、$\cos\theta = \frac{1}{2}$、$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、$\theta = \frac{\pi}{3}$ である。したがって、

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である。

演習 2 の解答・解説

$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ である。点 $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ は第 3 象限にあり、基準となる鋭角は $\frac{\pi}{6}$ なので、$\theta = 7\frac{\pi}{6}$ である。したがって、

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

である。

演習 3 の解答・解説

(1) $|\,-5\,| = 5$ であり、点は負の実軸上にあるので偏角は π である。よって、

$$-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

である。
(2) $|\,-4i\,| = 4$ であり、点は負の虚軸上にあるので偏角は $3\frac{\pi}{2}$ である。よって、

$$-4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

である。

演習 4 の解答・解説

(1) $\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$、$\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

である。
(2) $\cos\left(7\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$、$\sin\left(7\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ なので、

$$z = 2 - 2i$$

である。

演習 5 の解答・解説

$1 - i$ は第 4 象限にあり、基準となる鋭角は $\frac{\pi}{4}$ である。
(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ では、$\theta = 7\frac{\pi}{4}$ である。
(2) $-\pi < \theta \leq \pi$ では、$\theta = -\frac{\pi}{4}$ である。
両者は 2π だけ異なり、同じ向きを表す。偏角全体は

$$\arg z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

である。

演習 6 の解答・解説

極形式にすると

$$z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

である。$\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$、$\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$z = 3 - 3\sqrt{3}i$$

である。また、偏角全体は

$$\arg z = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

である。