

第 176 講 分数関数

学習目標

この講では、分数関数の定義域・値域・漸近線の関係性を式から判断できるようになる。また、基本形からグラフの位置や平行移動の向きを読み取れるようになる。

分数関数を見る視点

分数関数を考えるときは、式の中で値が定まらなくなる条件と、グラフ全体の位置を決める形に注目することが重要である。本講では、実数 x, a, p, q について $a \neq 0$ とした

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

の形を中心に扱う。この形では、分母 $x-p$ が 0 にならないという条件から定義域が決まり、 p, q による平行移動からグラフの位置を読むことができる。分子の係数 a は枝の向きを決める要素であり、符号によって基本形のグラフがどの位置に現れるかが変化する。一般の分数関数では、多項式の商として表される式全体を考えるが、この講では特に一次分数形の構造を利用して性質を調べる。

分数関数の定義

分数関数とは、実係数多項式 $P(x), Q(x)$ を用いて

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

と表される関数である。ただし、 $Q(x)$ は零多項式ではない。この関数は、もとの分母が 0 にならない範囲、つまり

$$Q(x) \neq 0$$

を満たす x について定義される。本講で主に扱う一次分数形は、実数 a, p, q について $a \neq 0$ とした

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

である。このとき、分母条件より定義域は p 以外のすべての実数である。また、約分によって式が簡単になる場合でも、もとの分母が 0 になる値は定義域から除かれたままである。

基本形と平行移動

基本形

$$y = \frac{a}{x}$$

では、 $a > 0$ のとき x と y の符号が一致するため、第 1 象限と第 3 象限に枝ができる。 $a < 0$ のときは符号が反対になるため、第 2 象限と第 4 象限に枝ができる。

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

は、基本形を横方向に p 、縦方向に q だけ移動した形である。 $p > 0$ なら右へ、 $p < 0$ なら左へ移動し、 $q > 0$ なら上へ、 $q < 0$ なら下へ移動する。点 (p, q) はグラフ上の点ではなく、グラフの対称の基準となる中心である。この形では、漸近線をグラフの近づき方から考える。漸近線とは、グラフ上の点が限りなく遠くへ進むとき、その点と直線との距離が 0 へ近づくような直線である。

$$|y - q| = \left| \frac{a}{x - p} \right| = \frac{|a|}{|x - p|}$$

であるから、 $|x - p|$ を大きくすると $|y - q|$ は 0 へ近づく。したがって、グラフは水平線 $y = q$ に近づく。また、 $x \neq p$ の範囲で x を p に近づけると、 $|x - p|$ は 0 へ近づく。そのため、

$$|y - q| = \frac{|a|}{|x - p|}$$

より、 $|y - q|$ はいくらでも大きくなる。 q は定数なので、 $|y|$ もいくらでも大きくなる。このとき、グラフ上の点から直線 $x = p$ までの距離は $|x - p|$ であり、これは 0 へ近づく。したがって、グラフ上の点が直線 $x = p$ に限りなく近づきながら、値が大きく変化することが分かる。これは $x = p$ が垂直漸近線であることを意味する。よって漸近線は

$$x = p, \quad y = q$$

である。ただし、漸近線は単に「交わらない線」や「未定義になる場所」として決めるものではない。この形で $y = q$ と交わらないことは、 $a \neq 0$ と

$$(x - p)(y - q) = a$$

から分かる。もし $y = q$ なら左辺は 0 となり、 $a \neq 0$ に反するためである。また、 $x = p$ は定義域条件から除かれる値であり、関数の値を直接定めることはできない。ただし、垂直漸近線である根拠は単なる除外ではなく、上で示したように $|y|$ が限りなく大きくなるとき、グラフ上の点から直線 $x = p$ までの距離 $|x - p|$ が 0 へ近づくことである。

値域を式から調べる

$$y = \frac{a}{x - p} + q$$

の値域を調べるには、 y について式を変形する。

$$y - q = \frac{a}{x - p}$$

$$(x - p)(y - q) = a$$

ここで $a \neq 0$ なので、左辺が 0 になることはできない。したがって、

$$y \neq q$$

である。逆に、任意の $y \neq q$ に対して

$$x = p + \frac{a}{y - q}$$

とおくと、 $a \neq 0$ より $x \neq p$ となり、もとの関数の定義域を満たす。この x をもとの式へ代入すると、指定した y の値になる。したがって、 $y = q$ 以外のすべての実数が値域に含まれる。

分数式で注意すること

式を約分できる場合でも、もとの分母が 0 になる値は定義域から復活しない。例えば、

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

は形式的には $x+2$ と約分できるが、もとの式では $x=1$ を代入できない。また、分母が 0 になることだけから、必ず垂直漸近線になるとは限らない。約分によって穴ができる場合もあるため、式全体の形を確認する必要がある。

例題 1

$y = \frac{1}{x}$ について、定義域・値域・漸近線を求め、グラフの枝の位置を説明しなさい。また、代表点 $(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (-1, -1), (-2, -\frac{1}{2})$ がどの枝に属するか説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

関数は

$$y = \frac{1}{x}$$

である。分母が 0 になる $x=0$ は定義域に含められないため、定義域は 0 以外の実数全体である。値域を調べるために式を変形する。

$$xy = 1$$

もし $y=0$ なら左辺は 0 となり、 $xy=1$ に反する。したがって $y \neq 0$ である。逆に、任意の $y \neq 0$ に対して

$$x = \frac{1}{y}$$

とおくと、 $x \neq 0$ であり、元の式を満たす。よって値域は 0 以外の実数全体である。漸近線は

$$x = 0, \quad y = 0$$

である。実際、

$$|y| = \frac{1}{|x|}$$

であるから、 $|x|$ が大きくなると $|y|$ は 0 へ近づく。また、 $x \neq 0$ の範囲で $|x|$ が 0 へ近づくと、 $|y|$ はいくらでも大きくなる。指定された点について確認すると、

$$1 = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad -1 = \frac{1}{-1}, \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2}$$

より、 $(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (-1, -1), (-2, -\frac{1}{2})$ はすべてグラフ上の点である。また、係数 1 は正なので、式 $xy = 1$ では x と y の符号が必ず同じになる。したがって、 $(1, 1), (2, \frac{1}{2})$ は第 1 象限にあり、 $(-1, -1), (-2, -\frac{1}{2})$ は第 3 象限にある。ただし、4 つの代表点は枝の位置を確認するための例であり、それだけでグラフ全体を証明するものではない。式 $xy = 1$ によって全体の形が決まる。

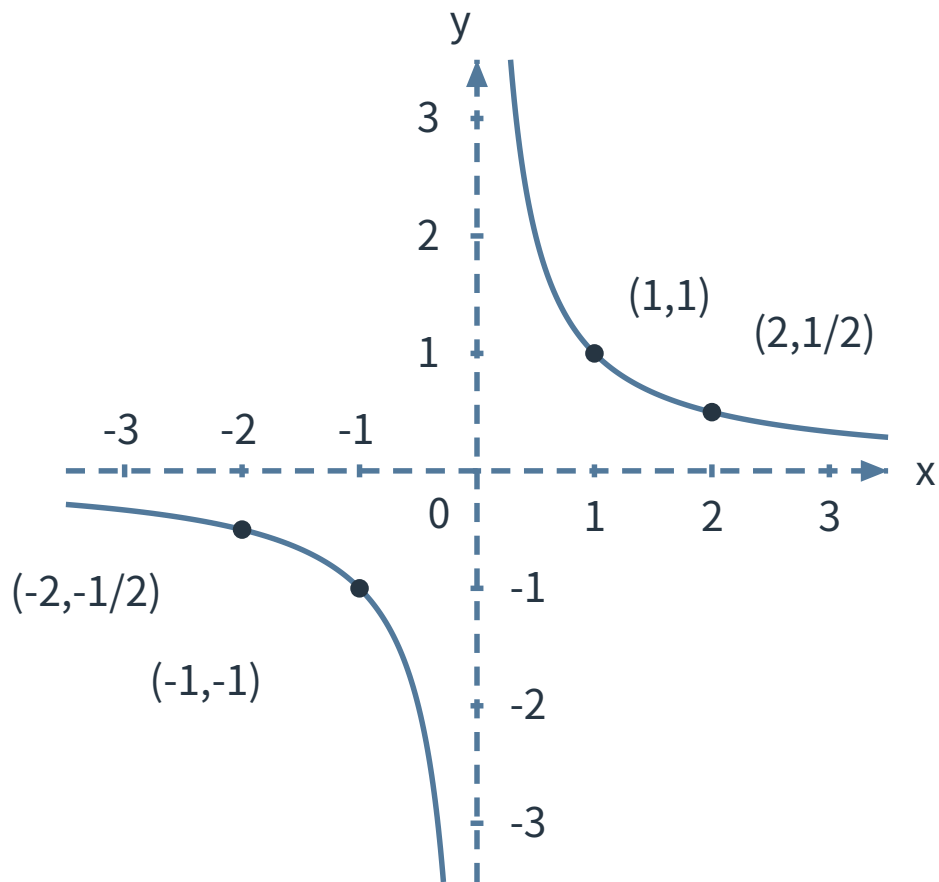


図1 実線は $y=1/x$ のグラフの一部である。 $x=0$ と $y=0$ は漸近線であり、破線の座標軸として示した。黒点は表示した代表点であり、曲線の表示端は定義域の端ではない。

例題 2

$y = -\frac{2}{x}$ について、定義域・値域・漸近線を求め、代表点 $(1, -2), (2, -1), (-1, 2), (-2, 1)$ を用いて枝の位置を説明しなさい。

例題 2 の解答・解説

分母が 0 になることはできないため、

$$x \neq 0$$

であり、定義域は 0 以外の実数全体である。値域は、

$$y = -\frac{2}{x}$$

を x について解くと、

$$x = -\frac{2}{y}$$

となるため、

$$y \neq 0$$

である。漸近線は、

$$x = 0, \quad y = 0$$

である。ここでは係数が負であるため、 x と y の符号は反対になる。したがって、 $(1, -2)$ 、 $(2, -1)$ は第 4 象限の枝にあり、 $(-1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ は第 2 象限の枝にある。係数の符号を見ることで、基本形の枝の位置を判断できる。

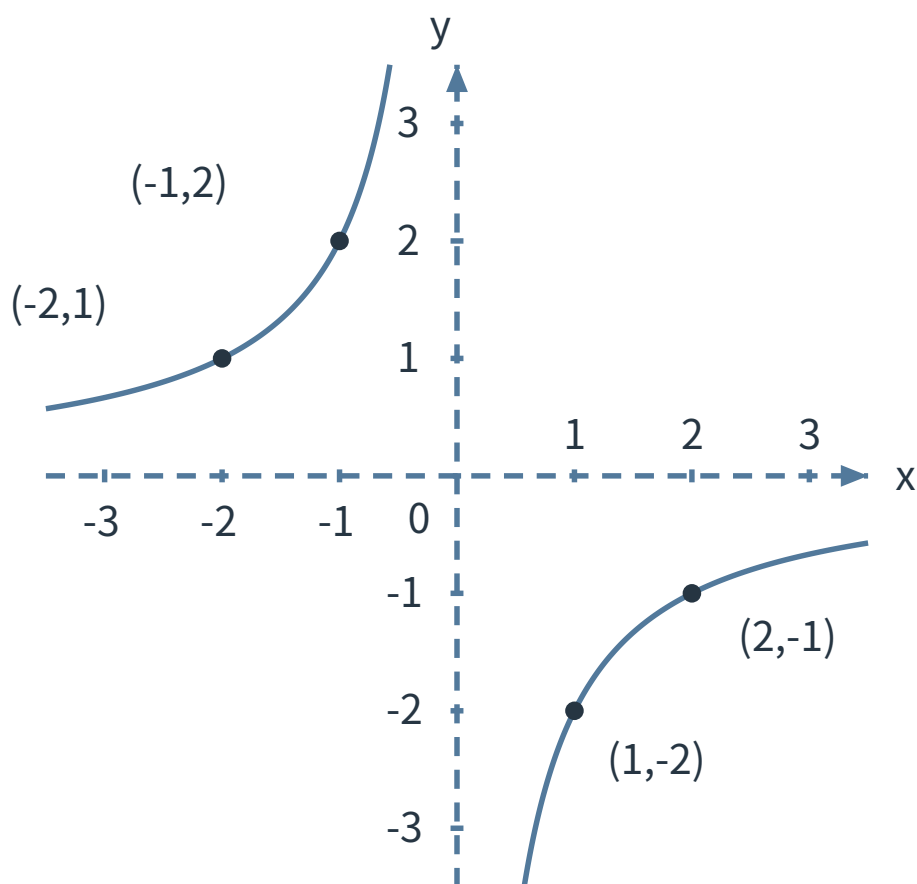


図2 実線は $y = -2/x$ のグラフの一部である。 $x=0$ と $y=0$ は漸近線であり、破線の座標軸として示した。黒点は表示した代表点であり、曲線の表示端は定義域の端ではない。

例題 3

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

について、定義域・値域・漸近線を求め、点 $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ を利用してグラフの位置を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

分子を分母に合わせて変形すると、

$$\begin{aligned}y &= \frac{x+1}{x-1} \\&= \frac{(x-1)+2}{x-1} \\&= 1 + \frac{2}{x-1}\end{aligned}$$

となる。これは、

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

の形であり、

$$a = 2, \quad p = 1, \quad q = 1$$

である。したがって、分母条件より、

$$x \neq 1$$

であり、定義域は1以外の実数全体である。また、値域は基本形と同じ考え方で、

$$y \neq 1$$

となる。漸近線は、

$$x = 1, \quad y = 1$$

である。中心となる点は $(1, 1)$ であり、 $a = 2 > 0$ なので、中心から見て右上と左下に枝ができる。指定された点について確認すると、

$$(-1, 0), (0, -1)$$

は中心 $(1, 1)$ の左下側にあり、

$$(2, 3), (3, 2)$$

は中心の右上側にある。このように、式を平行移動した形へ変形すると、漸近線と枝の位置を判断しやすくなる。

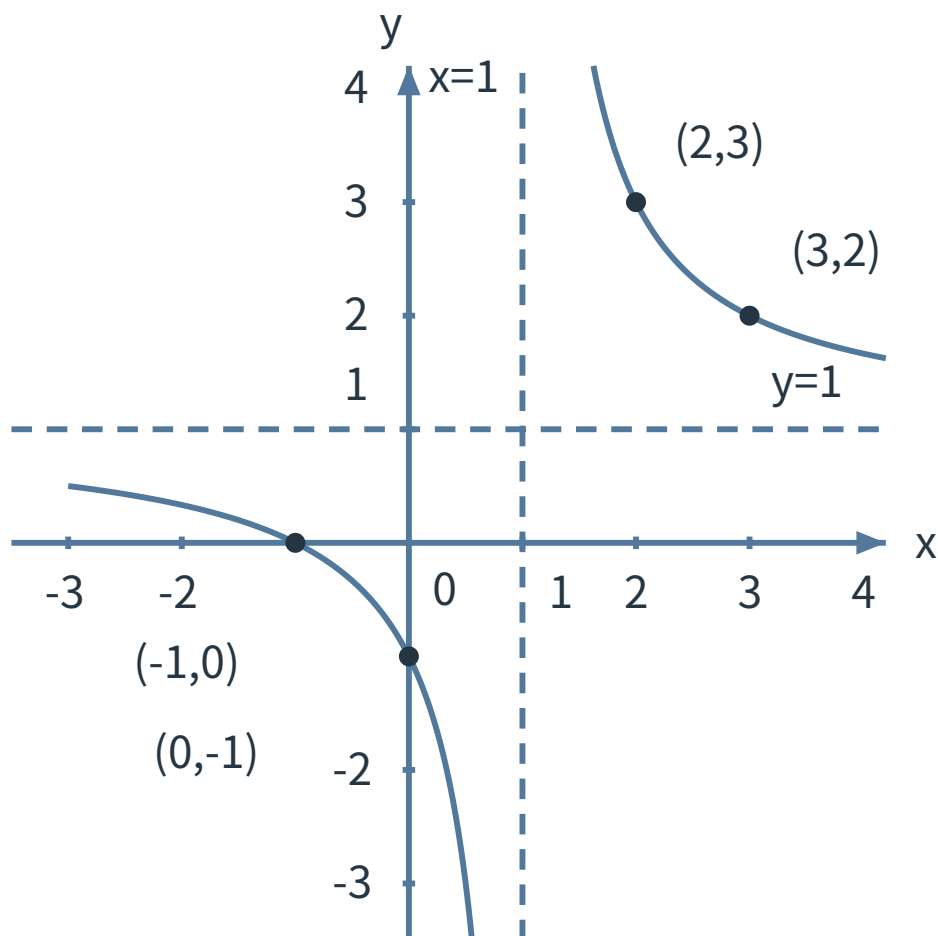


図3 実線は $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ のグラフの一部である。破線は漸近線 $x=1$ と $y=1$ を表す。その交点 $(1,1)$ は曲線上の点ではない。黒点は代表点であり、曲線の表示端は定義域の端ではない。

演習問題

演習問題 1

$y = \frac{3}{x}$ について、定義域・値域・漸近線を求め、係数の符号から枝の位置を説明しなさい。

演習問題 2

$y = -\frac{4}{x+2} + 1$ について、定義域・値域・漸近線を求めなさい。また、 $y = -\frac{4}{x}$ からどのように平行移動したグラフであるか説明しなさい。

演習問題 3

$$y = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

を基本形

$$y = \frac{a}{x - p} + q$$

に変形し、定義域・値域・漸近線を求めなさい。

演習問題 4

$$y = \frac{3x - 1}{x - 2}$$

を基本形に変形し、定義域・値域・漸近線を求めなさい。また、 $x = 0$ のときの値を求めなさい。

演習問題 5

関数

$$y = \frac{a}{x - 1} + 2$$

が点 $(3, 5)$ を通るとき、 a の値を求めなさい。また、この関数のグラフの枝の位置を説明しなさい。ただし、 $a \neq 0$ とする。

演習問題 6

関数

$$y = \frac{2}{x - 1} + 3$$

について、 $y = 5$ となる x を求めなさい。また、 $y = 3$ となる x が存在するか調べなさい。

演習問題 7

次の主張は正しいか判断し、誤りである場合は正しく説明しなさい。「 $y = -\frac{2}{x+3} - 1$ は $y = -\frac{2}{x}$ を右に 3、下に 1 だけ移動したグラフである。」

演習問題 8

$$y = \frac{x-1}{x-1}$$

について、元の式の定義域と値域を求めなさい。また、 $x=1$ が垂直漸近線になるか判断し、「分母が 0 なら必ず垂直漸近線である」という考え方の誤りを説明しなさい。この問題は、 $a \neq 0$ の非退化な一次分数形ではなく、比較例として扱う。

演習問題 1 の解答・解説

関数は

$$y = \frac{3}{x}$$

である。分母条件より、

$$x \neq 0$$

なので、定義域は 0 以外の実数全体である。値域は

$$xy = 3$$

から考える。 $y=0$ なら左辺が 0 になり不可能であるため、 $y \neq 0$ である。また、任意の $y \neq 0$ に対して

$$x = \frac{3}{y}$$

とすれば元の式を満たすため、値域は 0 以外の実数全体である。漸近線は

$$x = 0, \quad y = 0$$

である。 $|x|$ が大きくなると $|y| = \frac{3}{|x|}$ は 0 へ近づき、 $|x|$ が 0 へ近づくと $|y|$ はいくらでも大きくなる。また、係数 3 が正なので、枝は第 1 象限と第 3 象限にある。

演習問題 2 の解答・解説

与えられた式は、

$$y = -\frac{4}{x+2} + 1$$

である。分母が 0 になる条件から、

$$x + 2 \neq 0$$

より、

$$x \neq -2$$

である。したがって定義域は -2 以外の実数全体である。値域は、基本形

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

の形で見ると、ここでは $q = 1$ なので、

$$y \neq 1$$

である。漸近線は、

$$x = -2, \quad y = 1$$

である。また、

$$y = -\frac{4}{x+2} + 1$$

は、 $y = -\frac{4}{x}$ のグラフを左へ 2、上へ 1 移動したものである。横方向の移動では、 x の中が $x+2$ になっているため左へ 2 移動することに注意する。

演習問題 3 の解答・解説

分子を分母に合わせて変形する。

$$\begin{aligned}y &= \frac{2x+3}{x+1} \\&= \frac{2(x+1)+1}{x+1} \\&= 2 + \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

したがって、

$$y = \frac{1}{x+1} + 2$$

である。基本形と比較すると、

$$a = 1, \quad p = -1, \quad q = 2$$

となる。分母条件より、

$$x \neq -1$$

であるため、定義域は -1 以外の実数全体である。また、

$$y \neq 2$$

なので、値域は 2 以外の実数全体である。漸近線は、

$$x = -1, \quad y = 2$$

である。

演習問題 4 の解答・解説

式を変形する。

$$\begin{aligned}y &= \frac{3x - 1}{x - 2} \\&= \frac{3(x - 2) + 5}{x - 2} \\&= 3 + \frac{5}{x - 2}\end{aligned}$$

したがって、

$$y = \frac{5}{x - 2} + 3$$

である。分母条件より、

$$x \neq 2$$

なので、定義域は 2 以外の実数全体である。また、移動後の値 $q = 3$ より、

$$y \neq 3$$

である。漸近線は、

$$x = 2, \quad y = 3$$

となる。さらに、 $x = 0$ のとき、

$$y = \frac{3 \cdot 0 - 1}{0 - 2}$$

より、

$$y = \frac{1}{2}$$

である。

演習問題 5 の解答・解説

点 $(3, 5)$ を通るので、 $x = 3$ 、 $y = 5$ を代入する。

$$5 = \frac{a}{3-1} + 2$$

となる。整理すると、

$$3 = \frac{a}{2}$$

$$a = 6$$

である。したがって関数は、

$$y = \frac{6}{x-1} + 2$$

となる。 $a = 6 > 0$ なので、中心となる点 $(1, 2)$ から見て右上と左下に枝ができる。係数の符号を見ることで、基本形から枝の位置を判断できる。 $a = 6$ は $a \neq 0$ を満たす。また、点 $(3, 5)$ では $x = 3 \neq 1$ であり、

$$\frac{6}{3-1} + 2 = 3 + 2 = 5$$

となるため、条件を満たしている。

演習問題 6 の解答・解説

関数

$$y = \frac{2}{x-1} + 3$$

では、もとの分母条件より

$$x \neq 1$$

である。 $y = 5$ のときを考える。

$$5 = \frac{2}{x-1} + 3$$

より、

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{x-1} \\ x-1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

となる。 $x = 2$ は $x \neq 1$ を満たし、実際に

$$\frac{2}{2-1} + 3 = 5$$

であるため、解は $x = 2$ である。次に $y = 3$ を考える。

$$3 = \frac{2}{x-1} + 3$$

より、

$$0 = \frac{2}{x-1}$$

となる。しかし、分子は 2 で 0 ではないため、この式を満たす実数 x は存在しない。これは値域が $y \neq 3$ であることとも一致する。

演習問題 7 の解答・解説

主張を確認する。右へ 3 移動する場合、基本形の x は $x-3$ になる。下へ 1 移動する場合、最後に -1 を加える。したがって、 $y = -\frac{2}{x}$ を右へ 3、下へ 1 移動した式は、

$$y = -\frac{2}{x-3} - 1$$

である。一方、与えられた式は、

$$y = -\frac{2}{x+3} - 1$$

である。これは x の中が $x+3$ なので、左へ 3 移動している。したがって、主張は誤りであり、正しくは「 $y = -\frac{2}{x}$ を左へ 3、下へ 1 移動したグラフ」である。

演習問題 8 の解答・解説

もとの式は

$$y = \frac{x-1}{x-1}$$

である。分母条件より、

$$x-1 \neq 0$$

なので、定義域は

$$x \neq 1$$

を満たす実数全体である。この範囲では分子と分母が等しいため、

$$y = 1$$

となる。したがって値域は

$$\{1\}$$

である。グラフは水平線 $y = 1$ から点 $(1, 1)$ を除いたものである。 x を 1 へ近づけても、関数の値は常に 1 であり、有界なままである。そのため、 $x = 1$ は垂直漸近線ではない。この例から、分母が 0 になる値だけを見て垂直漸近線と判断することはできないと分かる。もとの分母条件を確認した上で、グラフの近づき方を調べる必要がある。