

第 34 講 二次方程式とグラフの共有点

学習目標

- ・ 二次方程式 $f(x) = 0$ の実数解と、放物線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点を対応させられる。
- ・ 二次方程式を解いて、放物線と x 軸の共有点の座標を求められる。
- ・ 2 つのグラフの共有点を求めるとき、2 つの式を等しくすればよい理由を説明できる。
- ・ 共有点の x 座標を求めた後、 y 座標まで正しく求められる。

方程式の解はグラフ上の位置として見られる

$f(x) = 0$ はグラフでは何を意味するか

二次関数 $y = f(x)$ を考えます。

このグラフ上で $y = 0$ になる点は、 x 軸上にあります。

したがって、

$$f(x) = 0$$

を満たす x は、放物線 $y = f(x)$ と x 軸が交わる点の x 座標です。

つまり、二次方程式の実数解を求めることと、放物線が x 軸とどこで交わるかを調べることは、同じ内容を式とグラフの別の見方で表しています。

二次方程式の実数解と共有点

二次方程式

$$f(x) = 0$$

の実数解が $x = r$ なら、放物線 $y = f(x)$ と x 軸は点 $(r, 0)$ を共有します。

逆に、放物線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点が $(r, 0)$ なら、 $x = r$ は方程式 $f(x) = 0$ の実数解です。

方程式とグラフをつなぐ

$y = f(x)$ と x 軸の共有点を求めるときは、

$$f(x) = 0$$

を解きます。

求めた解が共有点の x 座標になり、 x 軸上なので y 座標は 0 です。

二次方程式を解いて共有点を求める

$y = x^2 - 5x + 6$ と x 軸

放物線

$$y = x^2 - 5x + 6$$

と x 軸の共有点を考えます。

x 軸上では $y = 0$ なので、

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

を解きます。

左辺を因数分解すると $(x - 2)(x - 3) = 0$ なので、 $x = 2, 3$ です。

したがって、共有点は $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ です。

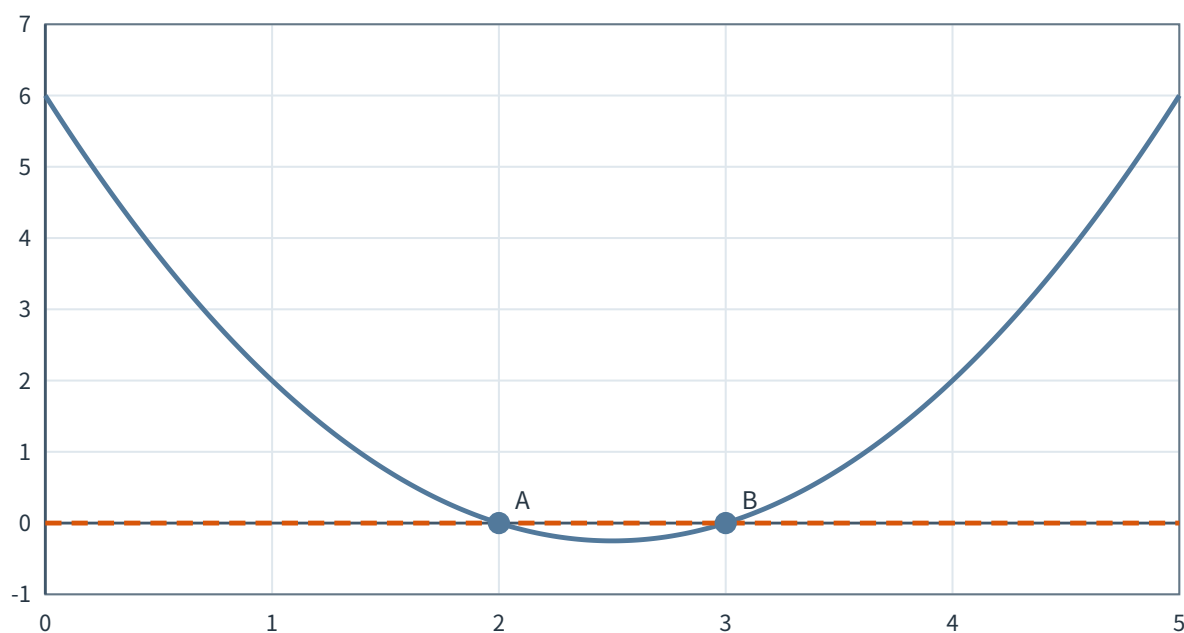


図 1 二次方程式の実数解と x 軸との共有点

解から座標へ直す

方程式の解が $x = 2, 3$ と求まっても、共有点を聞かれている場合はそこで終わりません。
 x 軸との共有点なので、

- $x = 2$ から $(2, 0)$
- $x = 3$ から $(3, 0)$

と座標で答えます。

解と共有点を区別する

二次方程式の解は x の値です。
 グラフの共有点は座標です。
 「解を求めなさい」なら $x = 2, 3$ 、「共有点を求めなさい」なら $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ と答えます。

接する場合も方程式で考えられる

共有点が 1 つになる例

放物線

$$y = (x - 2)^2$$

と x 軸の共有点を求めます。
 x 軸上では $y = 0$ なので、

$$(x - 2)^2 = 0$$

です。
 したがって、 $x = 2$ となり、共有点は $(2, 0)$ です。

このように、方程式を解くことで共有点を求める考え方は、放物線が x 軸に接する場合にも使えます。

共有点の個数判定は次講で扱う

方程式の実数解の個数と、グラフの共有点の個数には対応があります。

ただし、係数から共有点の個数を判別式で判断する方法は次講で扱います。

この講では、実際に方程式を解き、解と共有点を対応させることを中心にします。

2つのグラフの共有点では y の値が同じ

共有点は両方の式を同時に満たす

今度は、2つのグラフ

$$y = x^2$$

と

$$y = x + 2$$

の共有点を考えます。

共有点では、同じ x に対して2つのグラフの y 座標も同じです。

したがって、

$$x^2 = x + 2$$

とおけます。

整理すると $x^2 - x - 2 = 0$ なので、 $(x - 2)(x + 1) = 0$ より $x = 2, -1$ です。

共有点を求めるには、さらにそれぞれの x をどちらかの式へ代入して y 座標を求めます。

$x = 2$ のとき $y = 4$ 、 $x = -1$ のとき $y = 1$ です。

したがって、共有点は $(2, 4)$ 、 $(-1, 1)$ です。

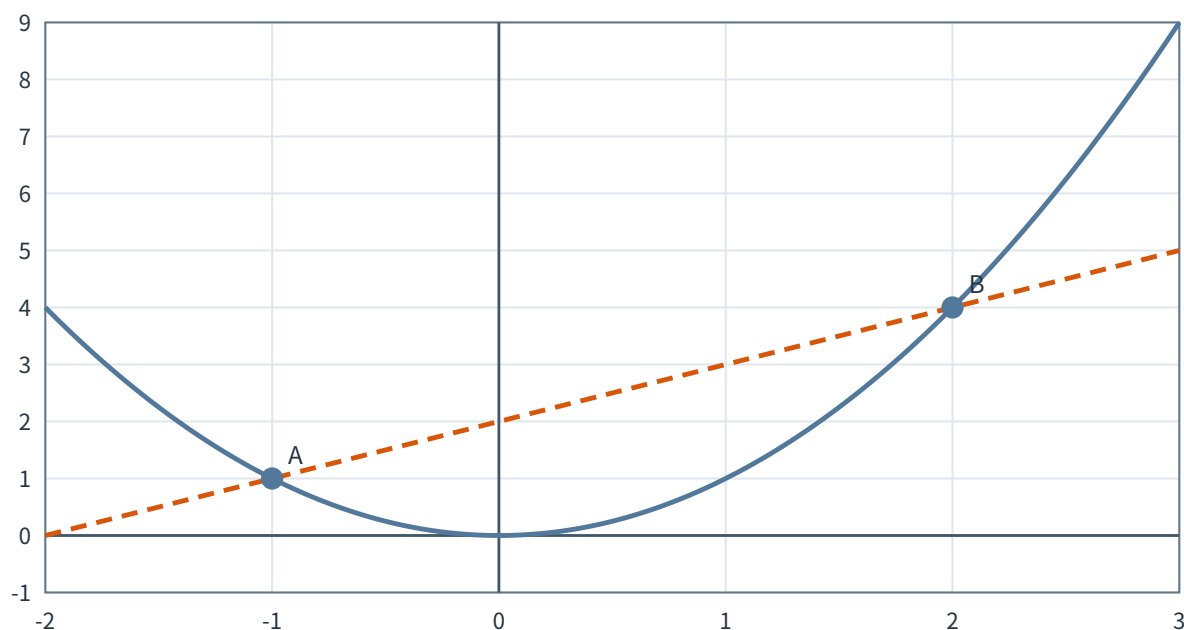


図2 $y = x^2$ と $y = x + 2$ の共有点

2つのグラフの共有点を求める手順

2つのグラフ

$$y = f(x), \quad y = g(x)$$

の共有点を求めるときは、

1. $f(x) = g(x)$ とする。
2. 方程式を解いて共有点の x 座標を求める。
3. 求めた x をどちらかの式へ代入して y 座標を求める。
4. (x, y) の形で共有点を書く。

という順に進めます。

なぜ式を等しくするのか

同じ点なら x 座標も y 座標も同じ

共有点とは、2つのグラフの両方に属する同じ点です。

たとえば、その点の x 座標を r とします。

一方のグラフでの高さが $f(r)$ 、もう一方での高さが $g(r)$ なら、同じ点であるためには高さも一致する必要があります。

したがって、

$$f(r) = g(r)$$

となります。

このため、2つのグラフの共有点を探すときは、2つの式の右辺を等しくします。

x を求めただけでは共有点にならない

$f(x) = g(x)$ を解いて得られるのは、まず共有点の x 座標です。

共有点そのものを答える場合は、その x を式へ代入して y 座標まで求めます。

検算は両方の式に代入する

求めた点が本当に両方のグラフ上にあるか

共有点として $(2, 4)$ を求めたとします。

$y = x^2$ に $x = 2$ を代入すると $y = 4$ です。

$y = x + 2$ に $x = 2$ を代入しても $y = 4$ です。

したがって、 $(2, 4)$ は確かに両方のグラフ上にあります。

計算に不安があるときは、求めた座標を2つの式へ代入して同じ y になるか確認できます。

共有点の検算

共有点 (r, s) を求めたら、

- 1つ目の式に $x = r$ を入れて $y = s$ になるか
- 2つ目の式に $x = r$ を入れて $y = s$ になるか

を確認すると、計算ミスを見つけやすくなります。

例題

例題 1

放物線

$$y = x^2 - 4x + 3$$

と x 軸の共有点を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

x 軸上では $y = 0$ なので、

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

を解きます。

$(x-1)(x-3) = 0$ より、 $x = 1, 3$ です。

したがって、共有点は $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ です。

例題 2

放物線

$$y = x^2 + 4x + 4$$

と x 軸の共有点を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

x 軸との共有点では $y = 0$ なので、

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

を解きます。

$(x+2)^2 = 0$ より、 $x = -2$ です。

したがって、共有点は $(-2, 0)$ です。

例題 3

放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = x$ の共有点を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

共有点では y の値が等しいので、

$$x^2 - 2x = x$$

とします。

整理すると $x^2 - 3x = 0$ なので、 $x(x-3) = 0$ より $x = 0, 3$ です。

$y = x$ に代入すると、 $y = 0, 3$ です。

したがって、共有点は $(0, 0)$ 、 $(3, 3)$ です。

演習問題

練習問題 1

放物線

$$y = x^2 - 7x + 12$$

と x 軸の共有点を求めなさい。

練習問題 2

放物線

$$y = x^2 - 6x + 9$$

と x 軸の共有点を求めなさい。

練習問題 3

二次方程式

$$x^2 + x - 6 = 0$$

を解き、その実数解に対応する放物線 $y = x^2 + x - 6$ と x 軸の共有点を求めなさい。

練習問題 4

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 3x$ の共有点を求めなさい。

練習問題 5

放物線 $y = x^2 - 2x + 1$ と直線 $y = x + 1$ の共有点を求めなさい。

練習問題 6

放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $y = x + 2$ の共有点を求めなさい。

練習問題 7

放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 1$ の共有点を求めなさい。
また、求めた点が両方のグラフ上にあることを代入して確かめなさい。

練習問題 8

ある生徒は、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の共有点を求めるため、

$$x^2 = 2x + 3$$

を解いて $x = -1, 3$ とし、「共有点は -1 と 3 である」と答えました。
この答えの不足している点を説明し、共有点を正しく求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

x 軸との共有点では $y = 0$ なので、

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

を解きます。

$(x - 3)(x - 4) = 0$ より $x = 3, 4$ です。

したがって、共有点は $(3, 0)$ 、 $(4, 0)$ です。

練習問題 2 の解答・解説

$x^2 - 6x + 9 = 0$ を解きます。

$(x - 3)^2 = 0$ より $x = 3$ です。

したがって、共有点は $(3, 0)$ です。

練習問題 3 の解答・解説

因数分解すると、

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

です。

したがって、二次方程式の実数解は $x = -3, 2$ です。

この値が x 軸との共有点の x 座標になるので、共有点は $(-3, 0)$ 、 $(2, 0)$ です。

練習問題 4 の解答・解説

共有点では $x^2 = 3x$ です。

整理すると $x(x - 3) = 0$ なので、 $x = 0, 3$ です。

$y = 3x$ に代入すると $y = 0, 9$ です。

したがって、共有点は $(0, 0)$ 、 $(3, 9)$ です。

練習問題 5 の解答・解説

共有点では、

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

です。

整理すると $x^2 - 3x = 0$ なので、 $x = 0, 3$ です。

$y = x + 1$ に代入すると $y = 1, 4$ です。

したがって、共有点は $(0, 1)$ 、 $(3, 4)$ です。

練習問題 6 の解答・解説

共有点では、

$$-x^2 + 4 = x + 2$$

です。

整理すると $x^2 + x - 2 = 0$ なので、 $(x+2)(x-1) = 0$ より $x = -2, 1$ です。

$y = x + 2$ に代入すると $y = 0, 3$ です。

したがって、共有点は $(-2, 0)$ 、 $(1, 3)$ です。

練習問題 7 の解答・解説

共有点では、

$$x^2 - 4x + 5 = 1$$

です。

整理すると $(x-2)^2 = 0$ なので、 $x = 2$ です。

$y = 1$ なので、共有点は $(2, 1)$ です。

放物線へ $x = 2$ を代入すると $y = 1$ となり、直線 $y = 1$ と一致します。

練習問題 8 の解答・解説

$x = -1, 3$ は共有点の x 座標であり、共有点そのものではありません。

$y = 2x + 3$ に代入します。

$x = -1$ のとき $y = 1$ 、 $x = 3$ のとき $y = 9$ です。

したがって、共有点は $(-1, 1)$ 、 $(3, 9)$ です。