

第 86 講 複素数の四則計算

学習目標

- ・ 複素数の加法・減法を、実部と虚部に分けて計算できる。
- ・ $i^2 = -1$ を用いて複素数の乗法を計算し、 $a + bi$ の形に整理できる。
- ・ 共役複素数の意味と、積が実数になる性質を説明できる。
- ・ 共役複素数を利用して複素数の除法を計算できる。
- ・ 除法では分母が 0 でないことを確認できる。

複素数の加法・減法

実部どうし、虚部どうしを計算する

複素数は $a + bi$ の形で表される。加法や減法では、実部どうし、虚部どうしをそれぞれまとめればよい。

a, b, c, d を実数とすると、

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

である。

また、

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

である。

これは、多項式で同じ文字を含む項をまとめる計算と同じ考え方である。実数部分と i を含む部分を別々に整理することが基本となる。

減法では符号に注意する

$(a + bi) - (c + di)$ を計算するときは、後ろの複素数全体を引く。
したがって、

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di$$

となる。

c だけでなく、 di の符号も変わることに注意が必要である。

例題 1

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

(1) $(3 + 5i) + (2 - 4i)$

(2) $(6 - 2i) - (1 + 3i)$

例題 1 の解答・解説

(1) 実部どうし、虚部どうしをまとめる。

$$\begin{aligned}(3 + 5i) + (2 - 4i) &= (3 + 2) + (5 - 4)i \\ &= 5 + i\end{aligned}$$

したがって、 $5 + i$ である。

(2) 後ろの複素数全体を引いてから整理する。

$$\begin{aligned}(6 - 2i) - (1 + 3i) &= 6 - 2i - 1 - 3i \\ &= 5 - 5i\end{aligned}$$

したがって、 $5 - 5i$ である。

複素数の乗法

$i^2 = -1$ を使って整理する

複素数の乗法では、実数の式と同じように分配法則を使って展開する。その後、 $i^2 = -1$ を用いて実部と虚部を整理する。

たとえば、

$$(a + bi)(c + di)$$

を展開すると、

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

となる。

計算の中心は、「普通に展開した後で i^2 を -1 に置き換える」ことである。

乗法の基本手順

複素数の積は、次の順序で計算するとよい。

1. 分配法則を使って展開する。
2. $i^2 = -1$ を使う。
3. 実部と虚部をまとめて $a + bi$ の形にする。

例題 2

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

$$(2 + 3i)(4 - i)$$

例題 2 の解答・解説

分配法則を使って展開する。

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4 - i) &= 8 - 2i + 12i - 3i^2 \\ &= 8 + 10i - 3(-1) \\ &= 11 + 10i\end{aligned}$$

$i^2 = -1$ であるため、 $-3i^2 = 3$ となることがポイントである。

したがって、 $11 + 10i$ である。

共役複素数

共役複素数

複素数 $a + bi$ に対して、虚部の符号だけを変えた

$$a - bi$$

を、 $a + bi$ の共役複素数という。

たとえば、 $3 + 2i$ の共役複素数は $3 - 2i$ であり、 $-1 - 5i$ の共役複素数は $-1 + 5i$ である。

共役な 2 数を掛けると実数になる

$a + bi$ とその共役複素数 $a - bi$ の積を計算すると、

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

となる。

虚数部分が打ち消し合い、結果は実数になる。この性質が複素数の除法で重要となる。

例題 3

複素数 $4 - 3i$ の共役複素数を答え、それらの積を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$4 - 3i$ の虚部の符号を変えると、共役複素数は $4 + 3i$ である。

積を計算すると、

$$\begin{aligned}(4 - 3i)(4 + 3i) &= 4^2 - (3i)^2 \\ &= 16 - 9i^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25\end{aligned}$$

したがって、共役複素数は $4 + 3i$ 、積は 25 である。

複素数の除法

分母を実数に変える

複素数の除法では、最終的に $a + bi$ の形へ整理する必要がある。

分母が $c + di$ であるとき、その共役複素数 $c - di$ を分母と分子の両方に掛ける。

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

分母は、

$$(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$$

となり、実数になる。

分子を展開すると、

$$\begin{aligned}(a + bi)(c - di) &= ac - adi + bci - bdi^2 \\ &= (ac + bd) + (bc - ad)i\end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

と整理できる。

分母が 0 でないことを確認する

除法では、分母となる複素数が 0 であってはならない。

$c + di = 0$ となるのは、実部と虚部がともに 0 のとき、すなわち

$$c = 0, \quad d = 0$$

のときである。

したがって、 $\frac{a+bi}{c+di}$ を考えるためには、 c, d が同時に 0 ではないことが必要である。

このとき $c^2 + d^2 > 0$ なので、共役複素数を掛けて得られる分母も 0 にはならない。

除法の基本手順

分母に虚数単位 i が含まれるときは、次の順序で計算する。

1. 分母が 0 でないことを確認する。
2. 分母の共役複素数を見つける。
3. 分子と分母の両方にその共役複素数を掛ける。
4. $i^2 = -1$ を使って展開する。
5. $a + bi$ の形に整理する。

例題 4

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

$$\frac{3 + 2i}{1 - i}$$

例題 4 の解答・解説

分母 $1 - i$ の共役複素数は $1 + i$ である。分子と分母の両方に $1 + i$ を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{3 + 2i}{1 - i} &= \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1 - i^2} \\ &= \frac{3 + 5i - 2}{2} \\ &= \frac{1 + 5i}{2}\end{aligned}$$

$a + bi$ の形に分けると、

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

である。

したがって、 $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ である。

演習問題

演習問題 1

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

- (1) $(5 + 2i) + (3 - 7i)$
- (2) $(-4 + 6i) + (2 + i)$
- (3) $(7 - 3i) - (2 + 5i)$

演習問題 2

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

- (1) $(2 + i)(3 + 4i)$
- (2) $(5 - 2i)(1 + 3i)$

演習問題 3

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

- (1) $(1 + 2i)^2$
- (2) $(3 - i)^2$

演習問題 4

次の複素数の共役複素数を答えよ。また、もとの複素数とその共役複素数の積を求めよ。

- (1) $2 + 5i$
- (2) $-3 + 4i$

演習問題 5

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

$$\frac{2+i}{1+i}$$

演習問題 6

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

$$\frac{4-3i}{2+i}$$

演習問題 7

次の計算をし、 $a + bi$ の形に整理せよ。

$$\frac{5}{1-2i}$$

演習問題 8

a, b を実数とする。次のうち、複素数の除法として定義できるものをすべて選べ。

- (1) $\frac{2+i}{3}$
- (2) $\frac{1-i}{2i}$
- (3) $\frac{4+i}{0+0i}$
- (4) $\frac{3-2i}{a+bi}$ ただし、 a, b は同時には 0 でない。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

(1) 実部どうし、虚部どうしをまとめる。

$$\begin{aligned}(5+2i) + (3-7i) &= (5+3) + (2-7)i \\ &= 8-5i\end{aligned}$$

したがって、 $8-5i$ である。

(2)

$$\begin{aligned}(-4+6i) + (2+i) &= (-4+2) + (6+1)i \\ &= -2+7i\end{aligned}$$

したがって、 $-2+7i$ である。

(3) 後ろの複素数全体を引く。

$$\begin{aligned}(7-3i) - (2+5i) &= 7-3i-2-5i \\ &= 5-8i\end{aligned}$$

したがって、 $5-8i$ である。

演習問題 2 の解答・解説

(1) 展開した後、 $i^2 = -1$ を使う。

$$\begin{aligned}(2 + i)(3 + 4i) &= 6 + 8i + 3i + 4i^2 \\ &= 6 + 11i - 4 \\ &= 2 + 11i\end{aligned}$$

したがって、 $2 + 11i$ である。

(2)

$$\begin{aligned}(5 - 2i)(1 + 3i) &= 5 + 15i - 2i - 6i^2 \\ &= 5 + 13i + 6 \\ &= 11 + 13i\end{aligned}$$

したがって、 $11 + 13i$ である。

演習問題 3 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}(1 + 2i)^2 &= 1 + 4i + 4i^2 \\ &= 1 + 4i - 4 \\ &= -3 + 4i\end{aligned}$$

したがって、 $-3 + 4i$ である。

(2)

$$\begin{aligned}(3 - i)^2 &= 9 - 6i + i^2 \\ &= 9 - 6i - 1 \\ &= 8 - 6i\end{aligned}$$

したがって、 $8 - 6i$ である。

演習問題 4 の解答・解説

(1) $2 + 5i$ の共役複素数は $2 - 5i$ である。

積は、

$$\begin{aligned}(2 + 5i)(2 - 5i) &= 2^2 + 5^2 \\ &= 29\end{aligned}$$

となる。

したがって、共役複素数は $2 - 5i$ 、積は 29 である。

(2) $-3 + 4i$ の共役複素数は $-3 - 4i$ である。

積は、

$$\begin{aligned}(-3 + 4i)(-3 - 4i) &= (-3)^2 + 4^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

となる。

したがって、共役複素数は $-3 - 4i$ 、積は 25 である。

演習問題 5 の解答・解説

分母 $1+i$ の共役複素数は $1-i$ である。

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{1+i} &= \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2-2i+i-i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{3-i}{2}\end{aligned}$$

したがって、 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ である。

演習問題 6 の解答・解説

分母 $2+i$ の共役複素数は $2-i$ である。

$$\begin{aligned}\frac{4-3i}{2+i} &= \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{8-4i-6i+3i^2}{4-i^2} \\ &= \frac{5-10i}{5} \\ &= 1-2i\end{aligned}$$

したがって、 $1-2i$ である。

演習問題 7 の解答・解説

分母 $1-2i$ の共役複素数は $1+2i$ である。

$$\begin{aligned}\frac{5}{1-2i} &= \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{5+10i}{1-(2i)^2} \\ &= \frac{5+10i}{5} \\ &= 1+2i\end{aligned}$$

したがって、 $1+2i$ である。

演習問題 8 の解答・解説

複素数の除法では、分母が 0 でないことが必要である。

- (1) 分母は 3 であり、0 ではない。したがって、定義できる。
 - (2) 分母は $2i$ である。実部は 0 であるが虚部は 2 であるため、 $2i \neq 0$ である。したがって、定義できる。
 - (3) 分母は $0+0i=0$ である。したがって、定義できない。
 - (4) a, b は同時には 0 でないので、 $a+bi \neq 0$ である。したがって、定義できる。
- 以上より、定義できるものは (1)、(2)、(4) である。