

第 107 講 正接のグラフ

学習目標

この講では、正接のグラフの特徴を理解し、自分でグラフの形を判断できるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 正接を単位円上の点の座標の比として理解する。
- ・ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ が定義される条件を説明する。
- ・ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) で正接が定義されない理由を説明する。
- ・ 正接のグラフが枝に分かれる理由を理解する。
- ・ 正接のグラフの周期、零点、増加の特徴を読み取る。

正接を単位円から考える

正接は、単位円上の点の座標の比として考えると、その意味が分かりやすい。

単位円とは、原点を中心とする半径 1 の円である。角 x は、横軸の正方向を始線として、反時計回りを正の向きとして測る。また、この講では角の単位をラジアンとする。

角 x に対応する単位円上の点を (X, Y) とする。 X は横座標、 Y は縦座標である。

正接は「大きさの比」だけで考えると符号が失われてしまう。例えば、縦方向や横方向の向きが変化した場合、正負の判断ができなくなる。

そこで、符号を含む座標として、 $\tan x = \frac{Y}{X}$ ($X \neq 0$) と考える。

単位円では、 $X = \cos x$ 、 $Y = \sin x$ であるため、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ となる。

ここで重要なのは、横座標 X が 0 の場合である。割る数が 0 になるため、正接は定義できない。

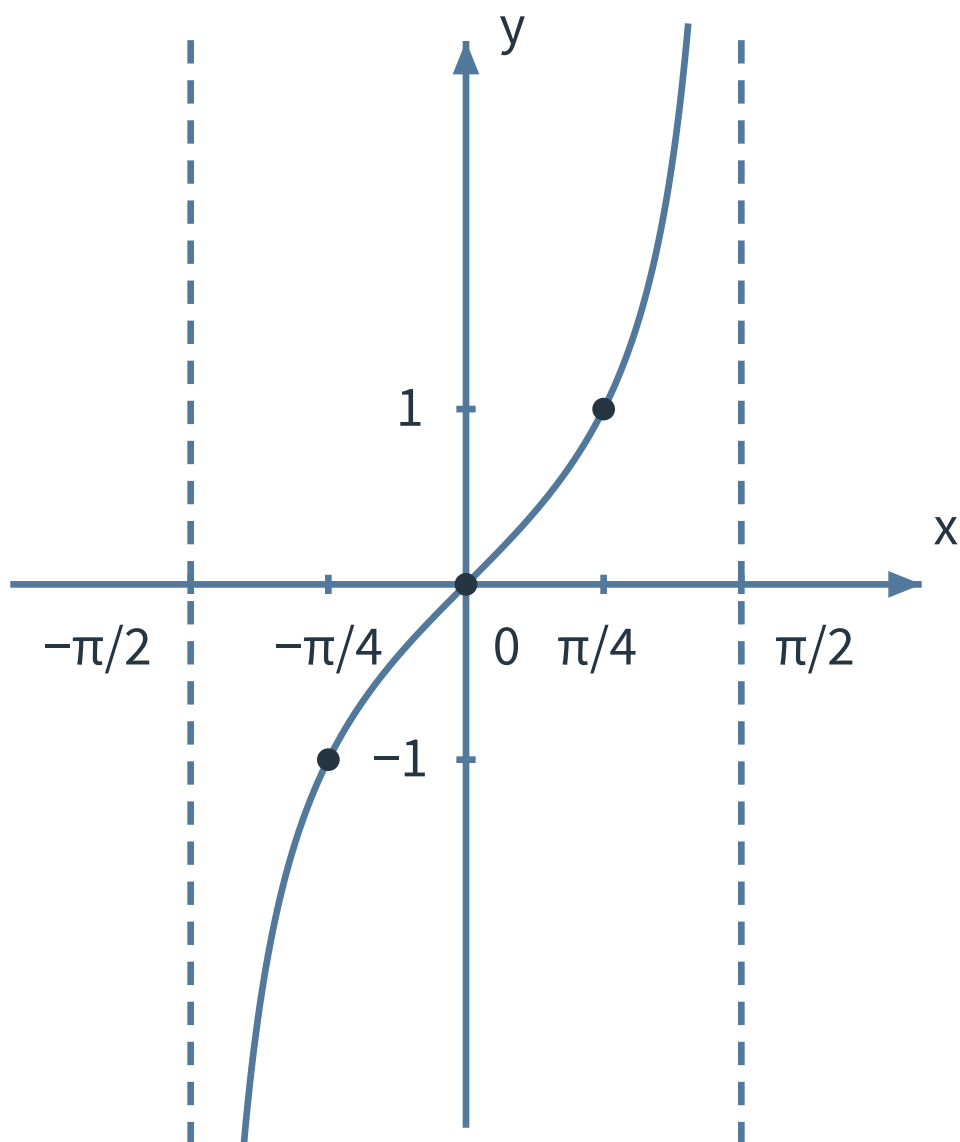
正接が定義される条件

正接は、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ で定義される。ただし、分母が 0 にならない必要があるため、 $\cos x \neq 0$ が条件である。

単位円で考えると、横座標が 0 になる点では正接を作れない。

横座標が 0 になる角は、 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) である。

したがって、この角では正接は定義されない。

図1 $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

基本グラフの形

正接の基本グラフは、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で1つの枝を作る。

この枝では、 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ では $\tan x$ は負、 $x = 0$ では $\tan x = 0$ 、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $\tan x$ は正となる。
 x が $-\frac{\pi}{2}$ に右側から近づくと、 $\sin x$ は負の値に近づき、 $\cos x$ は正の小さい値になる。そのため、 $\tan x$ は負のまま絶対値が際限なく大きくなる。

一方、 x が $\frac{\pi}{2}$ に左側から近づくと、 $\sin x$ は正の値に近づき、 $\cos x$ は正の小さい値になる。そのため、 $\tan x$ は正のまま絶対値が際限なく大きくなる。

基本枝の内部ではグラフは滑らかにつながっており、連続的に増加する。ただし、 $x = \frac{\pi}{2}$ のような正接が定義されない角では別の枝に分かれる。

縦の破線で表される直線は漸近線であり、グラフそのものではない。正接の値がその直線上に存在するわけではなく、有限の上端や下端があるわけでもない。

正接のグラフを見るポイント

正接のグラフを判断するときは、次の順に見るとよい。

1. 定義されない角を確認する。

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ではグラフを描かない。

1. 零点を確認する。

$\sin x = 0$ となる角では $\tan x = 0$ である。

1. 符号を確認する。

正接は $\sin x$ と $\cos x$ の符号の組み合わせで正負が決まる。

1. 周期を確認する。

正接の周期は π である。

正弦や余弦は周期が 2π であるが、正接では半回転で同じ値に戻る。

正接の周期が π になる理由

単位円で角を π だけ増やすことは、点を半回転させることである。

半回転すると、単位円上の点 $(\cos x, \sin x)$ は $(-\cos x, -\sin x)$ へ移る。

このとき正接を考えると、 $\tan(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x}$ となる。

分子と分母が同時に符号反転するため、比の値は変化しない。

したがって、 $\tan(x + \pi) = \tan x$ であり、正接の周期は π である。

$\frac{\pi}{2}$ 付近での変化

$x = \frac{\pi}{2}$ 付近では、正接の分母である $\cos x$ の符号に注目する。

$\frac{\pi}{2}$ より左側では、 $\cos x$ は正であり、0 に近づいていく。一方、 $\frac{\pi}{2}$ より右側では、 $\cos x$ は負であり、絶対値が 0 に近づいていく。

また、どちら側でも $\sin x$ は 1 に近づく。

そのため、左側では正の数に近い $\sin x$ を、正の小さい値に近づく $\cos x$ で割ることになり、 $\tan x$ は正の大きな値になる。

右側では、正の数に近い $\sin x$ を、負の小さい値に近づく $\cos x$ で割ることになり、 $\tan x$ は負の大きな値になる。

このように、 $\frac{\pi}{2}$ の左右では分母の符号が変わるため、グラフは別々の枝になる。

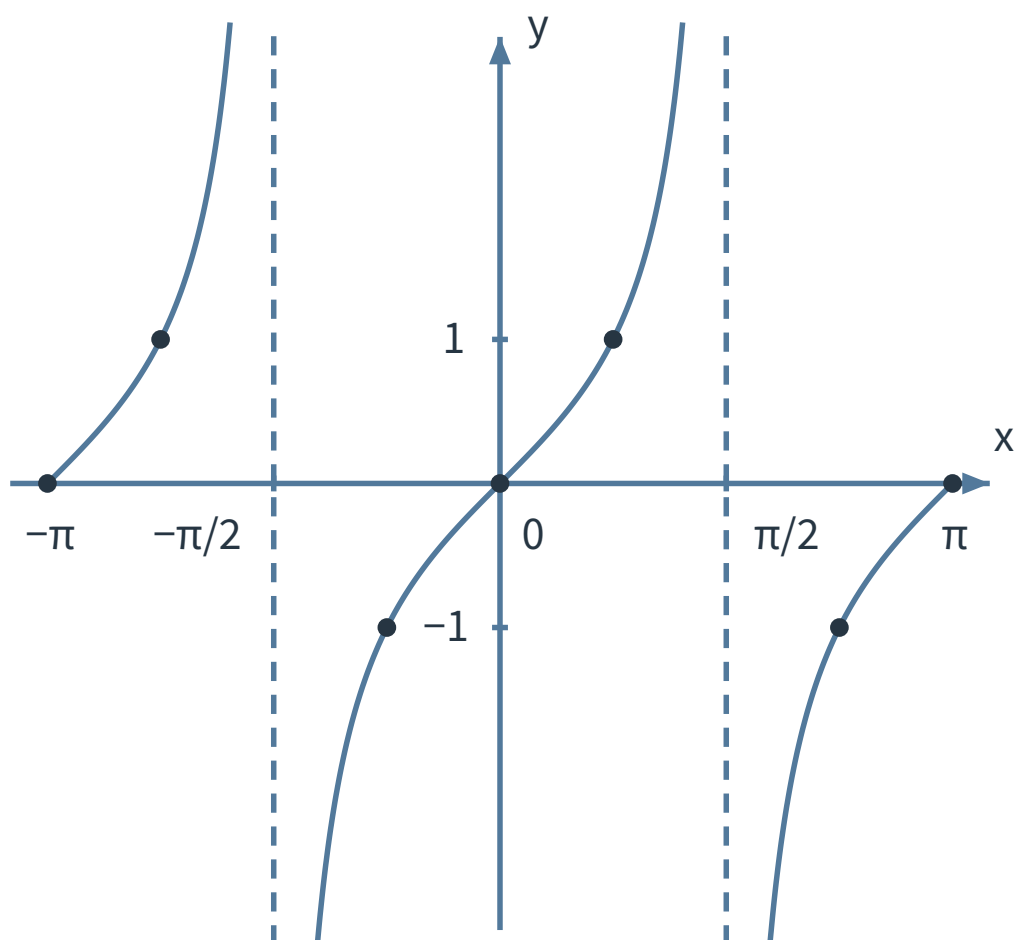


図2 $y = \tan x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$, $x = \pm \frac{\pi}{2}$ を除く)

注意

正接について、次の考え方は誤りである。

- $x = \frac{\pi}{2}$ の左右のグラフを線で結ぶ。
- 正接は全実数で単調増加すると考える。
- 漸近線をグラフの一部として考える。

正しい見方は、不連続点を境にした各連続区間で増加していると考えることである。

例題

例題 1：正接の基本グラフの読み取り

図1の正接のグラフについて答えよ。

- (1) 点 $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ と $(\frac{\pi}{4}, 1)$ がグラフ上にある理由を、 $\sin x$ と $\cos x$ の値を使って説明せよ。
- (2) $x = \frac{\pi}{2}$ に対応するグラフ上の点が存在しない理由を答えよ。

例題 1：正接の基本グラフの読み取りの解答・解説

(1) $x = -\frac{\pi}{4}$ では、 $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

したがって、 $\tan(-\frac{\pi}{4}) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ となる。

また、 $x = \frac{\pi}{4}$ では、 $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

したがって、 $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ となる。

よって、対応する点は $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ と $(\frac{\pi}{4}, 1)$ である。

(2) 正接は、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ である。

$x = \frac{\pi}{2}$ では、 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ となるため、分母が0になり正接は定義されない。

したがって、 $x = \frac{\pi}{2}$ に対応するグラフ上の点は存在しない。

例題 2：周期とグラフの判断

正接のグラフについて、次の問いに答えよ。

(1) $\tan \frac{3\pi}{4}$ の値を求めよ。

(2) $\tan(\frac{3\pi}{4} + \pi)$ の値を求め、正接の周期との関係を説明せよ。

例題 2：周期とグラフの判断の解答・解説

(1) $x = \frac{3\pi}{4}$ では、 $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

したがって、 $\tan \frac{3\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ となる。

(2) 正接の周期は π であるため、 $\tan(\frac{3\pi}{4} + \pi) = \tan \frac{3\pi}{4}$ となる。

したがって、 $\tan \frac{7\pi}{4} = -1$ である。

これは、角を π だけ増やすと単位円上の点が半回転し、 $(\cos x, \sin x)$ の両方の符号が反転するためである。

分子と分母が同時に符号反転するため、比の値は変わらない。

例題 3：区間内での最大・最小

区間 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ における関数 $y = \tan x$ の最大値と最小値、およびそのときの x を求めよ。

例題 3：区間内での最大・最小の解答・解説

区間 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ では、正接は定義されない点を含まない。

正接はこの区間で増加するため、最小値は左端、最大値は右端でとる。

左端では、 $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ である。

右端では、 $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ である。

したがって、最小値は -1 で、そのとき $x = -\frac{\pi}{4}$ である。

最大値は 1 で、そのとき $x = \frac{\pi}{4}$ である。

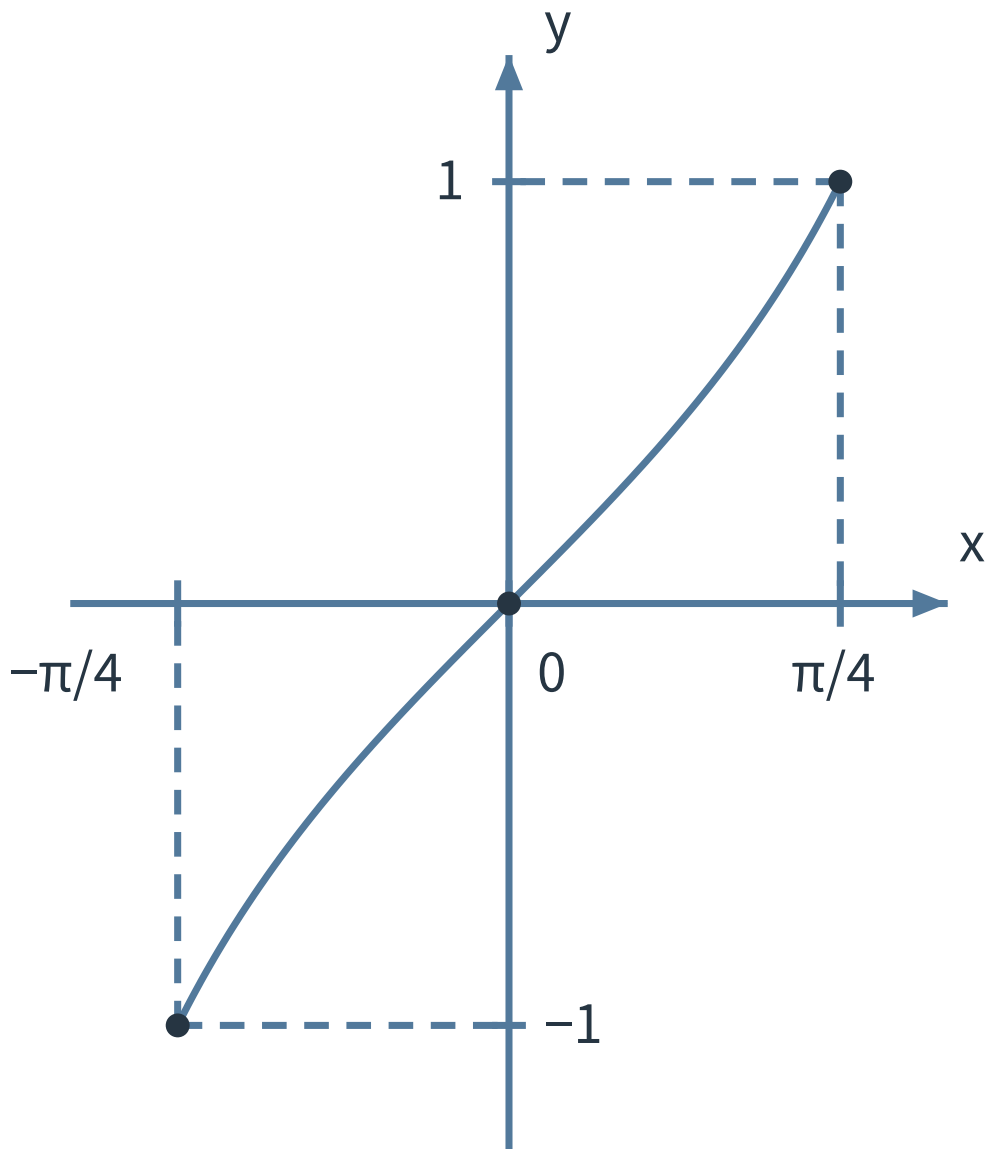


図3 $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

区間の両端を含むため、両方の値を取得できる。

演習問題

演習 1：定義されない角の特定

次の範囲において、 $y = \tan x$ が定義されない角をすべて答えよ。

$$0 \leq x < 2\pi$$

演習 2：正接の符号判断

次の値の符号を答えよ。

$\tan \frac{5\pi}{6}$ 正の値なら「正」、負の値なら「負」と答え、その理由も説明せよ。

演習 3：零点の読み取り

次の範囲で、 $y = \tan x$ のグラフが x 軸と交わる点の x 座標をすべて答えよ。

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

演習 4： π 周期を利用した値の計算

次の値を求めよ。

$\tan \frac{9\pi}{4}$ 正接の周期に注目して考えよ。

演習 5：漸近線をまたぐ判断

次の説明のうち、正しいものを 1 つ選べ。

- ・ A. $x = \frac{\pi}{2}$ は正接のグラフの一部なので、左右の枝を線で結ぶことができる。
- ・ B. $x = \frac{\pi}{2}$ では正接が定義されないため、左右の枝を線で結ぶことはできない。
- ・ C. $x = \frac{\pi}{2}$ では $\tan x = 0$ になるため、グラフは x 軸と交わる。
- ・ D. $x = \frac{\pi}{2}$ では正接の値が一定になるため、水平な線になる。

演習 6：同じ枝の中での増加

次の区間について、 $y = \tan x$ が増加するか答えよ。

(1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ただし、「全実数上で増加する」という表現は使わず、各区間について答えよ。

演習 7：境界による最大値・最小値の違い

関数 $y = \tan x$ について、次の範囲における最大値と最小値の有無を答えよ。

(1) $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}$ (2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 最大値または最小値が存在する場合は、その値とそのときの x も答えよ。存在しない場合は、その理由を説明せよ。

演習 8：定義条件と符号の組み合わせ

次の問いに答えよ。

- (1) $\tan x$ が定義されない角を一般に表せ。
- (2) $x = \frac{7\pi}{6}$ における $\tan x$ の符号を答えよ。
- (3) $x = \frac{7\pi}{6}$ と $x = \frac{\pi}{6}$ の正接の値の関係を説明せよ。

演習問題の解答・解説

演習 1：定義されない角の特定の解答・解説

正接は、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ で定義されるため、 $\cos x = 0$ となる角では定義されない。

したがって、 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) である。

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲では、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ が該当する。

よって、定義されない角は $\frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ である。

演習 2：正接の符号判断の解答・解説

$\frac{5\pi}{6}$ は第 2 象限の角である。

第 2 象限では、 $\sin x > 0$ 、 $\cos x < 0$ である。

したがって、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ は正の数を負の数で割ることになるため、負の値になる。

よって、 $\tan \frac{5\pi}{6}$ は負である。

演習 3：零点の読み取りの解答・解説

正接が 0 になるのは、 $\sin x = 0$ となる角である。

したがって、 $x = k\pi$ (k は整数) である。

範囲が $-\pi \leq x \leq \pi$ なので、 $x = -\pi, 0, \pi$ である。

よって、グラフと x 軸が交わる点の x 座標は $-\pi, 0, \pi$ である。

演習 4： π 周期を利用した値の計算の解答・解説

正接の周期は π である。

$\frac{9\pi}{4}$ から π を 2 回引くと、 $\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4}$ となる。

したがって、 $\tan \frac{9\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4}$ である。

よって、 $\tan \frac{9\pi}{4} = 1$ となる。

演習 5：漸近線をまたぐ判断の解答・解説

正しい選択肢は B である。

$x = \frac{\pi}{2}$ では、 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ となるため、正接は定義されない。

したがって、この直線は漸近線であり、グラフそのものではない。

A は、定義されない場所をグラフで結んでいるため誤りである。

C は、 $\tan \frac{\pi}{2}$ は存在しないため誤りである。

D も、正接の値が一定になるわけではないため誤りである。

演習 6：同じ枝の中での増加の解答・解説

(1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ では、正接の 1 つの枝の範囲である。

この区間では x が増えると $\tan x$ も増える。

したがって、増加する。

(2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ でも、定義されない点を含まない 1 つの枝である。

この区間でも x が増えると $\tan x$ は増加する。

したがって、増加する。

ただし、 $x = \frac{\pi}{2}$ や $x = \frac{3\pi}{2}$ をまたいで考えることはできない。

演習 7：境界による最大値・最小値の違いの解答・解説

(1) 区間 $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}$ は、正接の 1 つの枝の中にある。

正接はこの範囲で増加するため、最小値は左端でとる。

$x = -\frac{\pi}{4}$ では、 $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ である。

したがって、最小値は -1 で、そのとき $x = -\frac{\pi}{4}$ である。

一方、右端の $x = \frac{\pi}{4}$ は含まれていない。

$\tan x$ は x が $\frac{\pi}{4}$ に近づくと 1 に近づくが、 1 になる点は範囲内に存在しない。

したがって、最大値は存在しない。

(2) 区間 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ でも正接は 1 つの枝の中で増加する。

しかし、左側では値が負の方向へ際限なく大きくなり、右側では値が正の方向へ際限なく大きくなる。

そのため、最大値をとる点も最小値をとる点も存在しない。

よって、最大値・最小値はともに存在しない。

演習 8：定義条件と符号の組み合わせの解答・解説

(1) 正接は $\cos x = 0$ のとき定義されない。

したがって、 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) である。

(2) $\frac{7\pi}{6}$ は第 3 象限の角である。

第 3 象限では、 $\sin x < 0$ 、 $\cos x < 0$ である。

したがって、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ は負の数を負の数で割るため、正になる。

よって、 $\tan \frac{7\pi}{6}$ は正である。

(3) $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$ である。

正接の周期は π なので、 $\tan(\frac{\pi}{6} + \pi) = \tan \frac{\pi}{6}$ となる。

したがって、 $\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6}$ である。